

ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA KECANDUAN ALKOHOL TIPE SDAR

Giovanni Petrus Sanit^{1*}, Leonardus Frengky Obe², Nugraha K. F. Dethan³, Faustianus Luan⁴

^{1*,2,3,4}Program Studi Matematika, Universitas Timor, Kefamenanu-NTT, Indonesia

giosanit04@gmail.com¹, frengkyobe@gmail.com², nugrahadethan@unimor.ac.id³, luanfaustianus@gmail.com⁴

ABSTRACT

Alcohol is a psychoactive substance that is addictive. Psychoactive substances are a class of substances that act selectively, especially on the brain, which can cause changes in a person's behavior, emotions, cognition, perception and consciousness. Alcohol is an addictive substance that can cause addiction and dependence. Alcohol addiction is a condition when a person experiences an addiction to alcohol and is difficult to control until he becomes dependent. Alcohol addiction occurs due to consuming too much alcohol so that the level is sufficient to cause mental changes and experience a sensation of satisfaction when consumed. The habit of consuming alcohol for teenagers begins due to a lack of knowledge and invitations, persuasion and seduction from friends which make a teenager want to try consuming alcohol. After getting to know and feel the sensation of consuming alcohol, a teenager gradually begins to fall into the world of alcohol and begins to increase his consumption due to the free social environment among teenagers. This research aims to build a mathematical model of SDAR type alcohol addiction. Based on the research results, two equilibrium points were obtained, namely the equilibrium point free from alcohol addiction T_1 and will be stable when $\mathcal{R}_0 < 1$ and the equilibrium point where there is alcohol addiction T_2 and will be stable when $\mathcal{R}_0 > 1$. The simulation results were observed in two conditions, namely when $\beta = 0,1$ and $c = 0,1$ the value $\mathcal{R}_0 = 0,02083 < 1$ was obtained, meaning that the rate of movement from the population of teenagers who tried to consume alcohol to alcohol addiction was still small, so that teenagers who Alcohol addiction will decrease until alcoholics will disappear from the population over time. Then when $\beta = 0,9$ and $c = 0,9$ the value $\mathcal{R}_0 = 1,7718 > 1$ is obtained, meaning that the rate of movement from the population of teenagers who try to consume alcohol to alcohol addiction is increasing until there will be more and more alcoholics and will increase in the population as along the time.

Keywords: *Alcohol, Mathematical Model, Basic Reproduction Number, Addiction.*

ABSTRAK

Alkohol adalah zat psikoaktif yang bersifat adiktif. Zat psikoaktif adalah golongan zat yang berkerja secara selektif terutama pada otak yang dapat menimbulkan perubahan pada perilaku, emosi, kognitif, persepsi dan kesadaran seseorang. Alkohol termasuk zat yang sifatnya adiktif yang dapat menimbulkan adiksi (*addiction*) yaitu ketagihan dan *dependensi* (ketergantungan). Kecanduan alkohol adalah kondisi ketika seseorang mengalami ketagihan akan alkohol dan sulit untuk dikendalikan sampai pada kondisi ketergantungan. Kecanduan alkohol terjadi akibat konsumsi alkohol yang terlalu banyak sehingga kadarnya cukup membuat perubahan mental dan mengalami sensasi kepuasan saat dikonsumsi. Kebiasaan konsumsi alkohol bagi para remaja bermula karena kurangnya pengetahuan serta adanya ajakan, bujukan dan rayuan teman yang membuat seorang remaja ingin mencoba mengkonsumsi alkohol. Setelah mengenal dan merasakan sensasi mengkonsumsi alkohol, secara bertahap seorang remaja mulai terjerumus kedalam dunia alkohol dan mulai meningkatkan konsumsinya yang disebabkan lingkungan pergaulan yang bebas di kalangan remaja. Penelitian ini bertujuan untuk membangun model matematika kecanduan alkohol tipe SDAR. Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas kecanduan alkohol T_1 dan akan stabil pada saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dan titik kesetimbangan ada kecanduan alkohol T_2 dan akan stabil pada saat $\mathcal{R}_0 > 1$. Hasil simulasi diamati dalam dua kondisi, yaitu pada saat $\beta = 0,1$ dan $c = 0,1$ diperoleh nilai $\mathcal{R}_0 = 0,02083 < 1$ artinya laju perpindahan dari populasi remaja yang coba konsumsi alkohol menuju kecanduan alkohol masih sedikit,

sehingga remaja yang kecanduan alkohol akan semakin menurun hingga pecandu alkohol akan menghilang dalam populasi seiring berjalannya waktu. Kemudian pada saat $\beta = 0,9$ dan $c = 0,9$ diperoleh nilai $\mathcal{R}_0 = 1,7718 > 1$ artinya laju perpindahan dari populasi remaja yang coba konsumsi alkohol menuju kecanduan alkohol semakin meningkat hingga pecandu alkohol akan semakin banyak dan akan bertambah dalam populasi seiring berjalannya waktu.

Kata Kunci: *Alkohol, Model Matematika, Bilangan Reproduksi Dasar, Kecanduan.*

PENDAHULUAN

Alkohol adalah zat psikoaktif yang bersifat adiktif. Zat psikoaktif adalah golongan zat yang berkerja secara selektif terutama pada otak yang dapat menimbulkan perubahan pada perilaku, emosi, kognitif, persepsi dan kesadaran seseorang (Taroreh dkk dalam Deshpande, 2013). Menurut Sukri (2020), Alkohol termasuk zat yang sifatnya adiktif yang dapat menimbulkan adiksi (*addiction*) yaitu ketagihan dan *dependensi* (ketergantungan). Kecanduan alkohol adalah kondisi ketika seseorang mengalami ketagihan akan alkohol dan sulit untuk dikendalikan sampai pada kondisi ketergantungan. Kecanduan alkohol terjadi akibat konsumsi alkohol yang terlalu banyak sehingga kadarnya cukup membuat perubahan mental dan mengalami sensasi kepuasan saat dikonsumsi. Bahaya konsumsi alkohol sangat mempengaruhi masa depan remaja karena Kurangnya Pengawasan dan Komunikasi dari orang tua yang tidak terlibat secara aktif dalam kehidupan anak-anak mereka atau kurangnya komunikasi yang terbuka tentang risiko dan konsekuensi yang dapat meningkatkan kemungkinan remaja untuk mencoba alkohol sehingga adanya peranan orang tua sangatlah penting dalam membimbing dan mengarahkan agar remaja lebih mengenal tentang bahaya alkohol dimana alkohol dapat merusak kesehatan fisik, mental, dan emosional. Saat ini, sudah banyak yang melakukan penelitian terkait kecanduan alkohol salah satunya adalah pemodelan matematika. Model matematika adalah hubungan antara komponen-komponen dalam suatu masalah yang dirumuskan dalam suatu persamaan matematika, yang memuat komponen-komponen itu sebagai variabelnya. Penelitian terkait kecanduan alkohol telah dilakukan oleh Hakim (2013), yang membahas model matematika tentang pengaruh alkohol terhadap kesehatan dan perkembangan sosial dengan memisahkan orang yang mengkonsumsi alkohol ke dalam model matematika tipe SDAR dan memperoleh hasil adanya pengaruh alkohol terhadap kesehatan dan perkembangan sosial dan sangat berpengaruh namun masih bisa dilakukan pengendalian terhadap konsumsi alkohol. Terinspirasi dari penelitian Hakim (2013), penulis merasa tertarik untuk membahas mengenai “**Analisis Kestabilan Model Matematika Kecanduan Alkohol Tipe SDAR**”, dengan membentuk model matematika menjadi 4 kompartemen tipe SDAR dimana, S adalah kompartemen/kelas yang rentan konsumsi alkohol, D adalah kompartemen/kelas yang coba konsumsi alkohol, A adalah kompartemen/kelas yang kecanduan alkohol, dan R adalah kompartemen/kelas yang sembuh dari pengaruh alkohol.

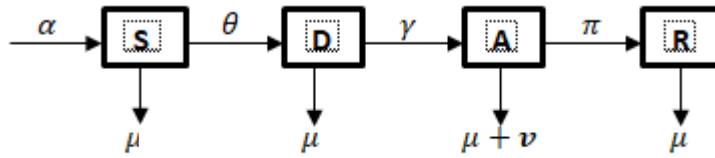
METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka yaitu dengan melakukan kajian pustaka dan pengumpulan referensi mengenai teori yang mendukung permasalahan yang dihadapi terkait pemodelan matematika dan simulasi. Kajian pustaka yang diperoleh digunakan untuk membentuk analisis kestabilan model matematika kecanduan alkohol. Kemudian menggunakan *Software Mathematica 10.0* untuk menentukan titik kesetimbangan, analisis kestabilan titik kesetimbangan dan melakukan simulasi numerik pada kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$ dan $\mathcal{R}_0 > 1$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Model Matematika

Populasi dibagi menjadi empat kelompok yaitu remaja rentan terpengaruh kebiasaan konsumsi alkohol (S), remaja yang coba konsumsi alkohol (D), remaja yang kecanduan alkohol (A), dan remaja yang sembuh dari pengaruh alkohol (R).



Gambar 2. Diagram Alir Kecanduan Alkohol Tipe SDAR

Gambaran umum terkait model kecanduan alkohol tipe SDAR adalah sebagai berikut:

1. Remaja rentan terpengaruh kebiasaan konsumsi alkohol $S(t)$
Laju perubahan pada populasi remaja rentan terpengaruh kebiasaan konsumsi alkohol (S) yaitu: bertambah karena adanya tingkat kelahiran yang rentan terpengaruh kebiasaan konsumsi alkohol (α), berkurang karena adanya kematian alami (μ), dan berkurang karena adanya pengaruh interaksi sosial di lingkungan remaja (θ).
2. Remaja yang coba konsumsi alkohol $D(t)$
Laju perubahan pada populasi remaja yang coba konsumsi alkohol (D) yaitu: bertambah karena adanya pengaruh interaksi sosial di lingkungan remaja (θ), berkurang karena adanya kematian alami (μ), dan berkurang karena berpindah dari remaja yang coba konsumsi alkohol (D) menjadi remaja yang kecanduan alkohol (A) disebabkan oleh laju kecanduan alkohol (γ).
3. Remaja yang kecanduan alkohol $A(t)$
Laju perubahan pada remaja yang kecanduan alkohol (A) yaitu: bertambah karena disebabkan oleh laju kecanduan alkohol (γ), berkurang karena adanya kematian alami (μ) disertai penyakit (v), dan berkurang karena berpindah dari remaja yang kecanduan alkohol (A) menjadi remaja yang sembuh dari pengaruh alkohol (R) yang disebabkan oleh adanya bimbingan dan arahan dari orang tua terhadap bahaya konsumsi alkohol (π).
4. Remaja yang sembuh dari pengaruh alkohol $R(t)$
Laju perubahan pada remaja yang sembuh dari pengaruh alkohol (R) yaitu: bertambah karena adanya bimbingan dan arahan dari orang tua terhadap bahaya konsumsi alkohol (π), dan berkurang karena tingkat kematian alami (μ).

Berdasarkan gambar diatas diperoleh sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - (\theta + \mu)S$$

$$\frac{dD}{dt} = \theta S - (\mu + \gamma)D$$

$$\frac{dA}{dt} = \gamma D - (\mu + v + \pi)A \quad (1)$$

$$\frac{dR}{dt} = \pi A - \mu R$$

Dengan $N(t) = S(t) + D(t) + A(t) + R(t)$, dan α adalah kelahiran alami yang termasuk dalam kelas rentan terpengaruh kebiasaan konsumsi alkohol lewat tekanan dan pengaruh lingkungan sosial pada tingkat dengan parameter,

$$\theta = \frac{\beta c (D + \tau A)}{N}.$$

Tabel 2. Deskripsi Parameter dalam Model SDAR

Parameter	Keterangan	Nilai	Syarat	Sumber
α	Kelahiran alami yang rentan terpengaruh konsumsi alkohol	0,2	$\alpha > 0$	Asumsi
μ	Kematian alami	0,03	$\mu > 0$	Asumsi
θ	Pengaruh lingkungan sosial pada remaja		$\theta > 0$	
c	Jumlah kontak antara peminum dan bukan peminum	0,1	$c > 0$	Asumsi
β	Kemungkinan menjadi peminum setelah kontak lama dengan peminum aktif	0,1	$\beta > 0$	Asumsi
γ	Laju kecanduan	0,05	$\gamma > 0$	Asumsi
τ	Faktor peningkatan konsumsi penyakit	0,5	$\tau > 0$	Asumsi
v		0,02	$v > 0$	Asumsi
π	Laju kesembuhan	0,03	$\pi > 0$	Asumsi

2. Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan dari persamaan (1) ditentukan dengan membuat ruas kanan dari persamaan tersebut sama dengan nol, yaitu:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dD}{dt} = \frac{dA}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$$

Setelah diselesaikan, akan diperoleh dua titik keseimbangan yakni:

- a. Titik Keseimbangan bebas kecanduan alkohol:

$$T_1 = (S, D, A, R) = \left(\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0, 0\right).$$

- b. Titik Keseimbangan ada kecanduan alkohol:

$$T_2 = (S^*, D^*, A^*, R^*) = \left(\frac{N(\pi+v+\mu)(\gamma+\mu)}{\beta c(\pi+v+\mu+\gamma\tau)}, \frac{\alpha}{\gamma+\mu} - \frac{N\mu(\pi+v+\mu)}{\beta c(\pi+v+\mu+\gamma\tau)}, \frac{\alpha\gamma}{(\pi+v+\mu)(\gamma+\mu)} - \frac{N\gamma\mu}{\beta c(\pi+v+\mu+\gamma\tau)}, \pi\gamma \left(\frac{\alpha}{\mu(\pi+v+\mu)(\gamma+\mu)} - \frac{N}{\beta c(\pi+v+\mu+\gamma\tau)} \right) \right).$$

3. Bilangan Reproduksi Dasar ($\mathcal{R}_0$)

Bilangan reproduksi dasar diperoleh dengan menggunakan metode *The Next Generation Matrix* pada titik keseimbangan bebas kecanduan T_1 . Bilangan reproduksi dasar diturunkan dengan memperhatikan persamaan kompartemen berkecanduan pada persamaan (1), dalam hal ini D dan A dimana:

$$\frac{dD}{dt} = \left(\frac{\beta c (D + \tau A)}{N} \right) S - D(\mu + \gamma),$$

$$\frac{dA}{dt} = \gamma D - A(\mu + v + \pi)$$

$\mathcal{R}_0$ diperoleh dengan menggunakan rumus $|\lambda I - K| = 0$ dengan $K = FV^{-1}$ Untuk memperoleh nilai K maka langkah awal tentukan F dan V di mana F adalah matriks laju kecanduan baru, sedangkan V merupakan matriks perpindahan sub populasi sehingga diperoleh:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\alpha\beta c}{N\mu} & \frac{\alpha\beta c\tau}{N\mu} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} -(\mu + \gamma) & 0 \\ \gamma & -(\mu + v + \pi) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya mencari nilai V^{-1} , diperoleh:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-\pi - v - \mu}{\pi\gamma + v\gamma + \pi\mu + v\mu + \gamma\mu + \mu^2} & 0 \\ -\frac{\gamma}{\pi\gamma + v\gamma + \pi\mu + v\mu + \gamma\mu + \mu^2} & \frac{-\gamma - \mu}{\pi\gamma + v\gamma + \pi\mu + v\mu + \gamma\mu + \mu^2} \end{bmatrix}$$

maka diperoleh bentuk:

$$K = FV^{-1}$$

$\mathcal{R}_0$ diperoleh dengan menggunakan rumus $|\lambda I - K| = 0$ dengan $K = FV^{-1}$

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\alpha\beta c(\pi + v + \mu + \gamma\tau)}{N\mu(\pi + v + \mu)(\gamma + \mu)}.$$

4. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

1. Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Kecanduan

Kestabilan titik keseimbangan bebas kecanduan (T_1) misalkan persamaan (1) ditulis dalam bentuk:

$$f_1(S, D, A, R) = \alpha - S(\mu + \theta)$$

$$f_2(S, D, A, R) = \theta S - D(\mu + \gamma)$$

$$f_3(S, D, A, R) = \gamma D - A(\mu + v + \pi)$$

$$f_4(S, D, A, R) = \pi A - \mu R$$

untuk menentukan kestabilan di sekitar titik keseimbangan bebas kecanduan (T_1), awalnya dilakukan pelinearan terhadap persamaan diatas, sehingga diperoleh matriks:

$$J = \begin{bmatrix} \left(-\mu - \frac{\beta c(D + \tau A)}{N}\right) & -\frac{S\beta c}{N} & -\frac{S\beta c\tau}{N} & 0 \\ \frac{\beta c(D + \tau A)}{N} & \frac{S\beta c}{N} - \gamma - \mu & \frac{S\beta c\tau}{N} & 0 \\ 0 & \gamma & -\pi - v - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \pi & -\mu \end{bmatrix}$$

dengan mensubstitusikan titik keseimbangan bebas kecanduan (T_1) pada matriks Jacobi, diperoleh:

$$J(T_1) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & 0 \\ 0 & A_4 & A_5 & 0 \\ 0 & A_6 & A_7 & 0 \\ 0 & 0 & A_8 & A_9 \end{bmatrix}$$

dengan $A_1 = -\mu$, $A_2 = -\frac{\alpha\beta c}{N\mu}$, $A_3 = -\frac{\alpha\beta c\tau}{N\mu}$, $A_4 = -\frac{\alpha\beta c}{N\mu} - \gamma - \mu$, $A_5 = \frac{\alpha\beta c\tau}{N\mu}$, $A_6 = \gamma$, $A_7 = -\pi - v - \mu$, $A_8 = \pi$, $A_9 = -\mu$.

kemudian untuk menentukan persamaan karakteristik maka, diperoleh:

$$\begin{vmatrix} \lambda - A_1 & A_2 & A_3 & 0 \\ 0 & \lambda - A_4 & A_5 & 0 \\ 0 & A_6 & \lambda - A_7 & 0 \\ 0 & 0 & A_8 & \lambda - A_9 \end{vmatrix} = 0$$

dengan menggunakan aturan kofaktor, maka determinan matriks di atas dapat dihitung sebagai berikut:

$$(\lambda - A_1) \begin{vmatrix} \lambda - A_4 & A_5 & 0 \\ A_6 & \lambda - A_7 & 0 \\ 0 & A_8 & \lambda - A_9 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - A_1)(\lambda^3 - \lambda^2(A_4 + A_7 + A_9) + \lambda(A_4A_7 - A_5A_6 + A_4A_9 + A_7A_9) - A_9(A_4A_7 - A_5A_6)) = 0 \quad (2)$$

Berdasarkan persamaan (2), diperoleh nilai eigen yang didefinisikan yaitu:

$$\lambda_1 = A_1 = -\mu$$

Sementara untuk melihat nilai eigen lainnya digunakan kriteria routh-hurwitz

$$\lambda^3 - \lambda^2(A_4 + A_7 + A_9) + \lambda(A_4A_7 - A_5A_6 + A_4A_9 + A_7A_9) - A_9(A_4A_7 - A_5A_6) \quad (3)$$

dengan, $e_0 = 1, e_1 = -(A_4 + A_7 + A_9), e_2 = A_4A_7 - A_5A_6 + A_4A_9 + A_7A_9, e_3 = -A_9(A_4A_7 - A_5A_6)$

persamaan (3) dapat ditulis kembali dalam bentuk:

$$\lambda^3 e_0 + \lambda^2 e_1 + \lambda e_2 + e_3 = 0 \quad (4)$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, persamaan (4) akan stabil jika memenuhi syarat kestabilan:

a. akan ditunjukkan $e_1 > 0$

$$e_1 = -(A_4 + A_7 + A_9) > 0$$

$$e_1 = N\mu\gamma + N\mu\pi + N\mu v + 3N\mu^2 > \alpha\beta c$$

maka terbukti $e_1 > 0$

b. akan ditunjukkan $e_2 > 0$

$$e_2 = A_4A_7 - A_5A_6 + A_4A_9 + A_7A_9 > 0$$

$$e_2 = 2N\mu^3 + 2N\mu^2\gamma + 2\alpha\beta c\mu + \alpha\beta c\pi + N\mu\gamma\pi + N\mu^2\pi + \alpha\beta cv + N\mu\gamma v + N\mu^2v > \alpha\beta c\tau\gamma$$

maka terbukti $e_2 > 0$

c. akan ditunjukkan $e_3 > 0$

$$e_3 = -A_9(A_4A_7 - A_5A_6) > 0$$

$$e_3 = \alpha\beta c\tau\gamma > \alpha\beta c + N\gamma\pi\mu + N\mu^2\pi + \alpha\beta cv + N\gamma v\mu + N\mu^2v + \alpha\beta c\mu + N\gamma\mu^2 + N\mu^3$$

maka terbukti $e_3 > 0$

d. akan ditunjukkan $e_1e_2 > e_3$ dimana $e_1e_2 - e_3 > 0$

$$e_1e_2 - e_3 = (-\alpha\beta c + N\mu\gamma + N\mu\pi + N\mu v + 3N\mu^2)(2N\mu^3 + 2N\mu^2\gamma + 2\alpha\beta c\mu + \alpha\beta c\pi + N\mu\gamma\pi + N\mu^2\pi + \alpha\beta cv + N\mu\gamma v + N\mu^2v - \alpha\beta c\tau\gamma) - (-\alpha\beta c - N\gamma\pi\mu - N\mu^2\pi - \alpha\beta cv - N\gamma v\mu - N\mu^2v - \alpha\beta c\mu - N\gamma\mu^2 - N\mu^3 + \alpha\beta c\tau\gamma) > 0$$

$$e_1e_2 - e_3 = 4N\mu^3\alpha\beta c + N\mu^2v\alpha\beta c + (\alpha\beta c)^2\tau\gamma + 8N^2\mu^4\gamma + 2N^2\mu^3\gamma^2 + (N\mu\gamma)^2\pi + 6N^2\mu^3\gamma\pi + (N\mu\gamma)^2v + 6N^2\mu^3\gamma v + 2N^2\mu^4\pi + 5N\mu^2\pi\alpha\beta c + N\mu\pi^2\alpha\beta c + (N\mu\pi)^2\gamma + N^2\mu^3\pi^2 + 2N\mu\pi v\alpha\beta c + 2(N\mu)^2\pi\gamma v + 2N^2\mu^3\pi v + 2N^2\mu^4v + N\mu v^2\alpha\beta c + (N\mu v)^2\gamma + N^2\mu^3v^2 + 6N^2\mu^5 + 3N^2\mu^3\pi + 3N\mu^2\alpha\beta cv + 3N^2\mu^3v + \alpha\beta c + N\mu\gamma\pi + N\mu^2\pi + \alpha\beta cv + N\mu\gamma v + N\mu^2v + \alpha\beta c\mu + N\mu^2\gamma + N\mu^3 > 2(\alpha\beta c)^2\mu + (\alpha\beta c)^2\pi + N\mu^2\pi\alpha\beta c + (\alpha\beta c)^2v + N\mu\gamma^2\alpha\beta c\tau + N\mu\pi\alpha\beta c\tau\gamma + N\mu v\alpha\beta c\tau\gamma + 3N\mu^2\alpha\beta c\tau\gamma + \alpha\beta c\tau\gamma$$

maka terbukti $e_1e_2 - e_3 > 0$

Karena λ_1 negatif dan kondisi kestabilan menurut kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, maka kestabilan titik kesetimbangan bebas kecanduan (T_1) akan stabil ketika $\mathcal{R}_0 < 1$

2. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Ada Kecanduan

Kestabilan titik kesetimbangan ada kecanduan (T_2) misalkan persamaan (1) ditulis dalam bentuk:

$$f_1(S^*, D^*, A^*, R^*) = \alpha - S^*(\mu + \theta)$$

$$f_2(S^*, D^*, A^*, R^*) = \theta S^* - D^*(\mu + \gamma)$$

$$f_3(S^*, D^*, A^*, R^*) = \gamma D^* - A^*(\mu + v + \pi)$$

$$f_4(S^*, D^*, A^*, R^*) = \pi A^* - \mu R^*$$

untuk menentukan kestabilan di sekitar titik kesetimbangan ada kecanduan (T_2), awalnya dilakukan pelinearan terhadap persamaan diatas, sehingga diperoleh matriks:

$$J = \begin{bmatrix} \left(-\mu - \frac{\beta c(D^* + \tau A^*)}{N}\right) & -\frac{s^*\beta c}{N} & -\frac{s^*\beta c\tau}{N} & 0 \\ \frac{\beta c(D^* + \tau A^*)}{N} & \frac{s^*\beta c}{N} - \gamma - \mu & \frac{s^*\beta c\tau}{N} & 0 \\ 0 & \gamma & -(\pi + v + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \pi & -\mu \end{bmatrix}$$

dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan ada kecanduan (T_2) pada matriks Jacobi diperoleh:

$$J(T_2) = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & 0 \\ z_4 & z_5 & z_6 & 0 \\ 0 & z_7 & z_8 & 0 \\ 0 & 0 & z_9 & z_{10} \end{bmatrix}$$

Dimana:

$$z_1 = \left(-\mu - \frac{\beta c(D^* + \tau A^*)}{N}\right), \\ z_2 = -\frac{s^* \beta c}{N}, z_3 = -\frac{s^* \beta c \tau}{N}, \quad z_4 = \frac{\beta c(D^* + \tau A^*)}{N}, z_5 = \frac{s^* \beta c}{N} - \gamma - \mu, \quad z_6 = \frac{s^* \beta c \tau}{N}, z_7 = \gamma, z_8 = -\pi - v - \mu, z_9 = \pi, z_{10} = -\mu, \text{ kemudian untuk menentukan persamaan karakteristik, maka diperoleh:}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - z_1 & z_2 & z_3 & 0 \\ z_4 & \lambda - z_5 & z_6 & 0 \\ 0 & z_7 & \lambda - z_8 & 0 \\ 0 & 0 & z_9 & \lambda - z_{10} \end{vmatrix} = 0$$

dengan menggunakan aturan kofaktor maka determinan matriks di atas dapat dihitung sebagai berikut:

$$(\lambda - z_{10}) \left((\lambda - z_1) \begin{bmatrix} \lambda - z_5 & z_6 \\ z_7 & \lambda - z_8 \end{bmatrix} - (z_4) \begin{bmatrix} z_2 & z_3 \\ z_7 & \lambda - z_8 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(\lambda - z_{10})(e_0 \lambda^3 + e_1 \lambda^2 + e_2 \lambda + e_3) = 0 \quad (5)$$

dengan $e_0 = 1$, $e_1 = (-z_8 - z_5 - z_1)$, $e_2 = (z_5 z_8 - z_6 z_7 + z_1 z_8 + z_1 z_5 - z_2 z_4)$, $e_3 = (-z_1 z_5 z_8 + z_1 z_6 z_7 + z_2 z_4 z_8 + z_3 z_4 z_7)$

sementara untuk melihat kestabilan nilai eigen lainnya digunakan kriteria Routh-Hurwitz.

$$e_0 \lambda^3 + e_1 \lambda^2 + e_2 \lambda + e_3 = 0 \quad (6)$$

Untuk memperoleh nilai e_1 , e_2 dan e_3 maka, misalkan; $\pi + v + \mu = x$, $\gamma + \mu = y$ dan $\gamma \tau = z$

1. Akan ditunjukkan $e_1 > 0$

$$e_1 = \pi + v + \mu - \frac{\left(\frac{N(\pi+v+\mu)(\gamma+\mu)}{c\beta(\pi+v+\mu+\gamma\tau)}\right)\beta c}{N} + \gamma + \mu + \mu + \frac{\beta c \left(\left(\frac{\alpha}{\gamma+\mu} - \frac{N\mu(\pi+v+\mu)}{c\beta(\pi+v+\mu+\gamma\tau)} \right) + \tau \left(\frac{\alpha\gamma}{(\pi+v+\mu)(\gamma+\mu)} - \frac{N\gamma\mu}{c\beta(\pi+v+\mu+\gamma\tau)} \right) \right)}{N} > 0.$$

$$e_1 = Nx^3y + Nx^2yz + Nxy^2z + \alpha\beta cx^2 + 2\alpha\beta cxz + \alpha\beta cz^2 > 0$$

maka terbukti $e_1 > 0$.

2. Akan ditunjukkan $e_2 > 0$

$$e_2 = \left(\frac{\left(\frac{N(\pi+v+\mu)(\gamma+\mu)}{c\beta(\pi+v+\mu+\gamma\tau)}\right)\beta c}{N} - \gamma - \mu \right) (-\pi - v - \mu) - \left(\frac{\left(\frac{N(\pi+v+\mu)(\gamma+\mu)}{c\beta(\pi+v+\mu+\gamma\tau)}\right)\beta c \tau}{N} \right) (\gamma) + \left(-\mu - \frac{\beta c \left(\left(\frac{\alpha}{\gamma+\mu} - \frac{N\mu(\pi+v+\mu)}{c\beta(\pi+v+\mu+\gamma\tau)} \right) + \tau \left(\frac{\alpha\gamma}{(\pi+v+\mu)(\gamma+\mu)} - \frac{N\gamma\mu}{c\beta(\pi+v+\mu+\gamma\tau)} \right) \right)}{N} \right) (-\pi - v - \mu) + \left(-\mu - \frac{\beta c \left(\left(\frac{\alpha}{\gamma+\mu} - \frac{N\mu(\pi+v+\mu)}{c\beta(\pi+v+\mu+\gamma\tau)} \right) + \tau \left(\frac{\alpha\gamma}{(\pi+v+\mu)(\gamma+\mu)} - \frac{N\gamma\mu}{c\beta(\pi+v+\mu+\gamma\tau)} \right) \right)}{N} \right) \left(\frac{\left(\frac{N(\pi+v+\mu)(\gamma+\mu)}{c\beta(\pi+v+\mu+\gamma\tau)}\right)\beta c}{N} - \gamma - \mu \right) - \left(-\frac{\left(\frac{N(\pi+v+\mu)(\gamma+\mu)}{c\beta(\pi+v+\mu+\gamma\tau)}\right)\beta c}{N} \right) \left(\frac{\beta c \left(\left(\frac{\alpha}{\gamma+\mu} - \frac{N\mu(\pi+v+\mu)}{c\beta(\pi+v+\mu+\gamma\tau)} \right) + \tau \left(\frac{\alpha\gamma}{(\pi+v+\mu)(\gamma+\mu)} - \frac{N\gamma\mu}{c\beta(\pi+v+\mu+\gamma\tau)} \right) \right)}{N} \right) > 0$$

$$e_2 = Nxy^2z + \alpha\beta cx^2 + \alpha\beta cxz + \alpha\beta cx^2z + \alpha\beta cz^2 + \alpha\beta cx^2y + \alpha\beta cxyz + \alpha\beta cxy + \alpha\beta cyz^2 > 0$$

maka terbukti $e_2 > 0$

3. Akan ditunjukkan $e_3 > 0$

$$e_3 = \left(\mu + \frac{\beta c \left(\frac{\alpha}{\gamma + \mu} - \frac{N\mu(\pi + v + \mu)}{c\beta(\pi + v + \mu + \gamma\tau)} + \tau \left(\frac{\alpha\gamma}{(\pi + v + \mu)(\gamma + \mu)} - \frac{N\gamma\mu}{c\beta(\pi + v + \mu + \gamma\tau)} \right) \right)}{N} \right) \left(\frac{N(\pi + v + \mu)(\gamma + \mu)}{c\beta(\pi + v + \mu + \gamma\tau)} \beta c - \gamma - \mu \right) (-\pi - v - \mu) + \left(-\mu - \frac{\beta c \left(\frac{\alpha}{\gamma + \mu} - \frac{N\mu(\pi + v + \mu)}{c\beta(\pi + v + \mu + \gamma\tau)} + \tau \left(\frac{\alpha\gamma}{(\pi + v + \mu)(\gamma + \mu)} - \frac{N\gamma\mu}{c\beta(\pi + v + \mu + \gamma\tau)} \right) \right)}{N} \right) \left(\frac{N(\pi + v + \mu)(\gamma + \mu)}{c\beta(\pi + v + \mu + \gamma\tau)} \beta c \tau \right) (\gamma) + \left(-\frac{N(\pi + v + \mu)(\gamma + \mu)}{c\beta(\pi + v + \mu + \gamma\tau)} \beta c \right) \left(\frac{\beta c \left(\frac{\alpha}{\gamma + \mu} - \frac{N\mu(\pi + v + \mu)}{c\beta(\pi + v + \mu + \gamma\tau)} + \tau \left(\frac{\alpha\gamma}{(\pi + v + \mu)(\gamma + \mu)} - \frac{N\gamma\mu}{c\beta(\pi + v + \mu + \gamma\tau)} \right) \right)}{N} \right) (-\pi - v - \mu) + \left(\frac{N(\pi + v + \mu)(\gamma + \mu)}{c\beta(\pi + v + \mu + \gamma\tau)} \beta c \tau \right) \left(\frac{\beta c \left(\frac{\alpha}{\gamma + \mu} - \frac{N\mu(\pi + v + \mu)}{c\beta(\pi + v + \mu + \gamma\tau)} + \tau \left(\frac{\alpha\gamma}{(\pi + v + \mu)(\gamma + \mu)} - \frac{N\gamma\mu}{c\beta(\pi + v + \mu + \gamma\tau)} \right) \right)}{N} \right) (\gamma) > 0$$

$$e_3 = \alpha\beta cx^2 + 2\alpha\beta cxz + \alpha\beta cz^2 > N\mu x^2 y + N\mu xyz$$

maka terbukti $e_3 > 0$

4. Akan ditunjukkan $e_1 e_2 > e_3$ dimana $e_1 e_2 - e_3 > 0$

$$e_1 e_2 - e_3 = (Nx^3 y + Nx^2 yz + Nxy^2 z + \alpha\beta cx^2 + 2\alpha\beta cxz + \alpha\beta cz^2)(Nxy^2 z - Nx^2 y^2 z + \alpha\beta cx^2 + \alpha\beta cxz + \alpha\beta cx^2 z + \alpha\beta cxz^2 - N\mu x^2 y^2 + \alpha\beta cx^2 y + \alpha\beta cxyz + \alpha\beta cxy + \alpha\beta cyz^2) - (\alpha\beta cx^2 + 2\alpha\beta cxz - N\mu x^2 y + \alpha\beta cz^2 - N\mu xyz) > 0$$

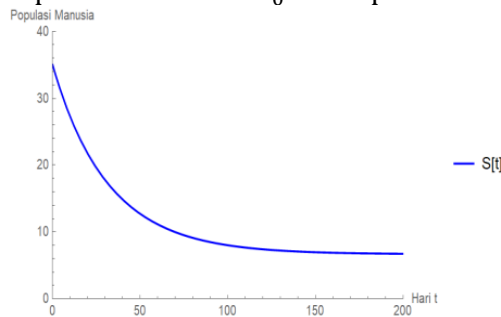
$$e_1 e_2 - e_3 = N^2 x^4 y^3 z + N\alpha\beta cx^5 y + 2N\alpha\beta cx^4 yz + N\alpha\beta cx^5 yz + 2N\alpha\beta cx^4 yz^2 + N\alpha\beta cx^4 y^3 + N\alpha\beta cx^4 y^2 + N\alpha\beta cx^3 y^2 z^2 + N^2 x^3 y^3 z^2 + N\alpha\beta cx^3 yz^2 + N\alpha\beta cx^3 yz^3 + N\alpha\beta cx^3 y^3 z + 3N\alpha\beta cx^3 y^2 z + N\alpha\beta cx^2 y^2 z^3 + N^2 x^2 y^4 z^2 + 3N\alpha\beta cx^2 y^2 z^2 + N\alpha\beta cx^2 y^4 z + N\alpha\beta cx^2 y^3 z^2 + N\alpha\beta cx^2 y^3 z + N\alpha\beta cxy^3 z^3 + (\alpha\beta c)^2 x^4 + 3(\alpha\beta c)^2 x^3 z + (\alpha\beta c)^2 x^4 z + 3(\alpha\beta c)^2 x^3 z^2 + (\alpha\beta c)^2 x^3 y^2 + (\alpha\beta c)^2 x^3 yz + (\alpha\beta c)^2 x^3 y + 3(\alpha\beta c)^2 x^2 yz^2 + 3(\alpha\beta c)^2 x^2 z^2 + 3(\alpha\beta c)^2 x^2 z^3 + 2(\alpha\beta c)^2 x^2 y^2 z + 2(\alpha\beta c)^2 x^2 yz + 3(\alpha\beta c)^2 xyz^3 + N\alpha\beta cxy^2 z^3 + (\alpha\beta c)^2 xz^3 + (\alpha\beta c)^2 x^2 z^3 + (\alpha\beta c)^2 xz^4 + (\alpha\beta c)^2 xy^2 z^2 + (\alpha\beta c)^2 xyz^2 + (\alpha\beta c)^2 yz^4 + N\mu x^2 y + N\mu xyz > N^2 x^5 y^3 z + N^2 \mu x^5 y^3 + N^2 x^4 y^3 z^2 + N^2 \mu x^4 y^3 z + N^2 x^3 y^4 z^2 + N^2 \mu x^3 y^4 z + N\mu \alpha\beta cx^4 y^2 + 2N\mu \alpha\beta cx^3 y^2 z + N\mu \alpha\beta cx^2 y^2 z^2 + \alpha\beta cx^2 + 2\alpha\beta cxz + \alpha\beta cz^2$$

maka terbukti $e_1 e_2 - e_3 > 0$

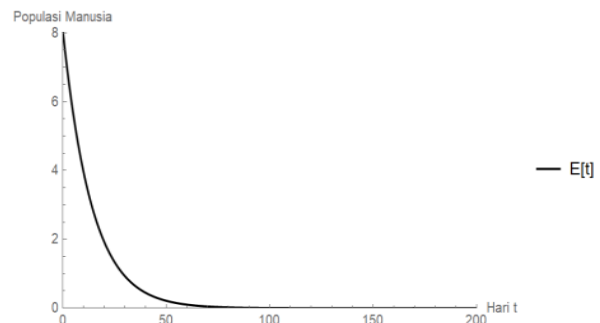
Karena syarat-syarat kestabilan titik kesetimbangan menurut kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, maka titik kesetimbangan ada kecanduan (T_2), akan stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

5. Simulasi Numerik

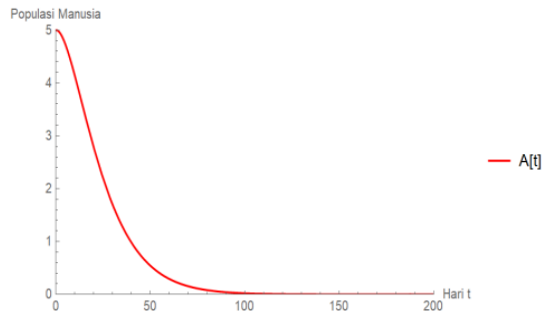
Simulasi ini diamati untuk dua kondisi, yaitu saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dan $\mathcal{R}_0 > 1$, serta beberapa nilai parameter yang mempengaruhi yaitu $\beta = 0,1$ dan $c = 0,1$ sementara nilai parameter yang lain tetap. Ketika kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$ diperoleh:



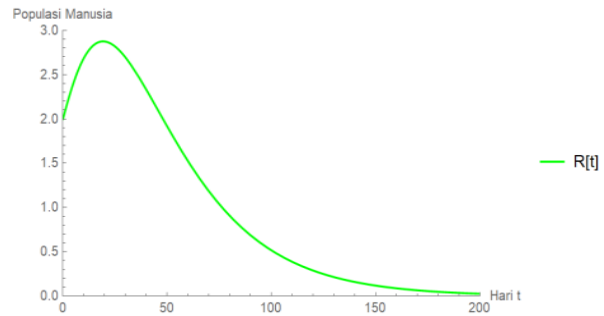
Gambar 3. Grafik Populasi Remaja yang Rentan



Gambar 4. Grafik Populasi Remaja yang Coba Mengonsumsi Alkohol

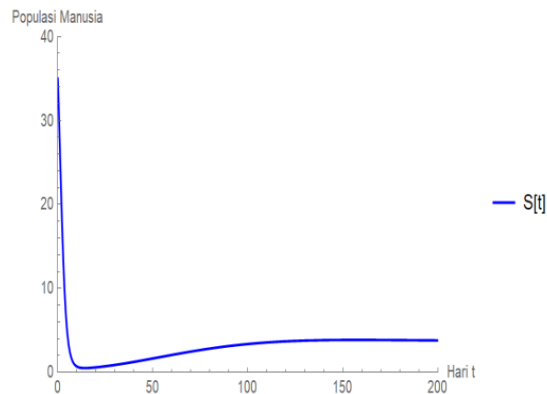


Gambar 5. Grafik Populasi Remaja Kecanduan

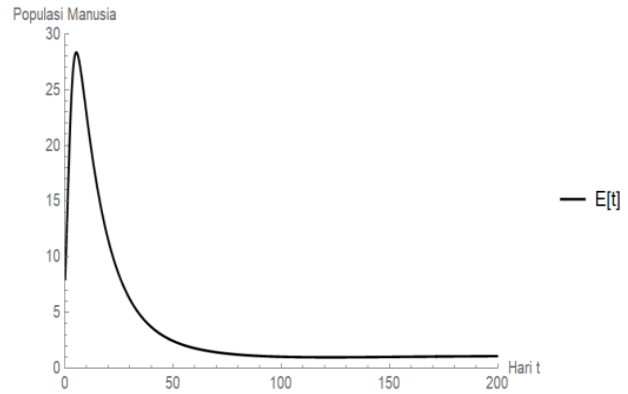


Gambar 6. Grafik Populasi Remaja yang Sembuh

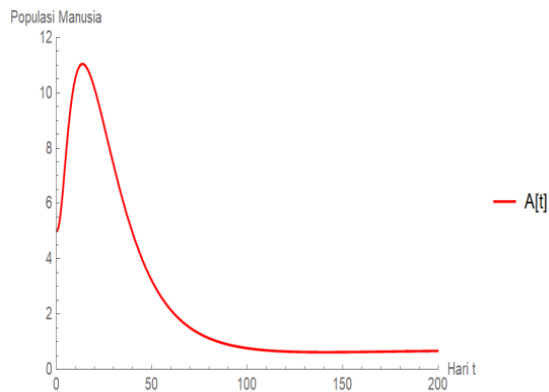
Pada saat $\beta = 0,1$ dan $c = 0,1$ diperoleh nilai $\mathcal{R}_0 = 0,02083 < 1$ artinya laju perpindahan dari remaja yang rentan terpengaruh kebiasaan konsumsi alkohol menuju remaja yang coba konsumsi alkohol masih sedikit, karena laju kelompok remaja yang coba konsumsi alkohol semakin sedikit menyebabkan populasi remaja yang kecanduan alkohol pun akan semakin menurun dan akan menghilang dari populasi seiring berjalannya waktu.



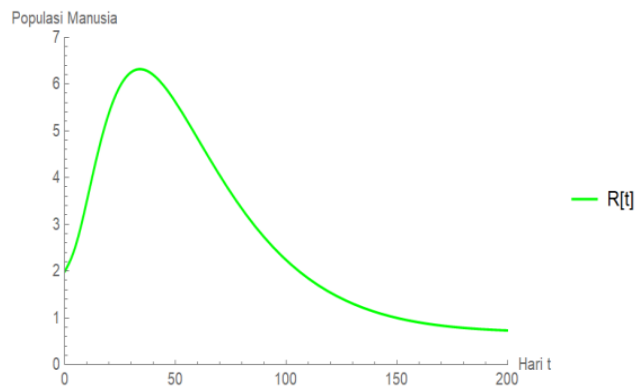
Gambar 7. Grafik Populasi Remaja yang Rentan



Gambar 8. Grafik Populasi Remaja yang Coba Mengonsumsi Alkohol



Gambar 9. Grafik Populasi Remaja Kecanduan



Gambar 10. Grafik Populasi Remaja yang Sembuh

Pada saat $\beta = 0,1$ dan $c = 0,1$ diperoleh nilai $\mathcal{R}_0 = 1,7718 > 1$ artinya laju perpindahan dari remaja yang rentan terpengaruh kebiasaan konsumsi alkohol menuju remaja yang coba konsumsi alkohol meningkat, karena ada laju kelompok remaja yang coba konsumsi menyebabkan populasi remaja yang kecanduan alkohol pun akan semakin ikut meningkat dan akan bertambah dalam populasi seiring berjalannya waktu.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang dilakukan terhadap analisis model matematika kecanduan alkohol tipe SDAR, maka diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Model yang dihasilkan mampu menggambarkan kecanduan alkohol tipe SDAR dengan membagi populasi menjadi empat kelompok yaitu: remaja rentan terpengaruh kebiasaan konsumsi alkohol (S), remaja yang coba konsumsi alkohol (D), remaja yang kecanduan alkohol (A), dan remaja yang sembuh dari pengaruh alkohol (R).
2. Titik kesetimbangan yang diperoleh ada dua yaitu titik kesetimbangan bebas kecanduan $T_1 = (S, D, A, R) = \left(\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ dan titik kesetimbangan ada kecanduan $T_2 = (S^*, D^*, A^*, R^*) = \left(\frac{N(\pi+v+\mu)(\gamma+\mu)}{\beta c(\pi+v+\mu+\gamma\tau)}, \frac{\alpha}{\gamma+\mu} - \frac{N\mu(\pi+v+\mu)}{\beta c(\pi+v+\mu+\gamma\tau)}, \frac{\alpha\gamma}{(\pi+v+\mu)(\gamma+\mu)} - \frac{N\gamma\mu}{\beta c(\pi+v+\mu+\gamma\tau)}, \pi\gamma \left(\frac{\alpha}{\mu(\pi+v+\mu)(\gamma+\mu)} - \frac{N}{\beta c(\pi+v+\mu+\gamma\tau)}\right)\right)$.

3. Bilangan Reproduksi Dasar ($\mathcal{R}_0$) diperoleh:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\alpha\beta c(\pi+v+\mu+\gamma\tau)}{N\mu(\pi+v+\mu)(\gamma+\mu)}$$

4. Hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan yang diperoleh yaitu:

- a. Kestabilan titik kesetimbangan bebas kecanduan

$\lambda_1 = -\mu$ adalah negatif dan syarat-syarat kestabilan titik kesetimbangan menurut kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi. Yakni: $e_1 > 0, e_2 > 0, e_3 > 0$ dan $e_1 e_2 > e_3$ terbukti, maka titik kesetimbangan bebas kecanduan (T_1), akan stabil jika $\mathcal{R}_0 = 0,02083 < 1$.

- b. Kestabilan titik kesetimbangan ada kecanduan

Karen syarat-syarat kestabilan titik kesetimbangan menurut kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi. Yakni:

$$e_1 = Nx^3y + Nx^2yz + Nxy^2z + \alpha\beta cx^2 + 2\alpha\beta cxz + \alpha\beta cz^2 > 0$$

$$e_2 = Nxy^2z + \alpha\beta cx^2 + \alpha\beta cxz + \alpha\beta cx^2z + \alpha\beta cxz^2 + \alpha\beta cx^2y + \alpha\beta cxyz + \alpha\beta cxy + \alpha\beta cyz^2 > Nx^2y^2z + N\mu x^2y^2$$

$e_3 = \alpha\beta cx^2 + 2\alpha\beta cxz + \alpha\beta cz^2 > N\mu x^2y + N\mu xyz$ serta $e_1 e_2 > e_3$ terbukti, maka titik kesetimbangan ada kecanduan (T_2), akan stabil jika $\mathcal{R}_0 = 1,7718 > 1$.

5. Hasil simulasi diamati untuk dua kondisi, yaitu:

- a. Kondisi $\mathcal{R}_0 = 0,02083 < 1$

Berdasarkan hasil simulasi pada saat kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$, jumlah populasi yang kecanduan alkohol menurun karena masih sedikit remaja yang terpengaruh dari lingkungan untuk coba mengkonsumsi alkohol, sehingga menyebabkan jumlah populasi yang coba mengkonsumsi alkohol dan populasi yang kecanduan alkohol juga menurun. Maka, populasi yang kecanduan alkohol akan semakin menurun hingga pecandu alkohol akan menghilang seiring berjalannya waktu.

- b. Kondisi $\mathcal{R}_0 = 1,7718 > 1$

Berdasarkan hasil simulasi pada saat $\mathcal{R}_0 = 1,7718 > 1$, jumlah populasi rentan terpengaruh kecanduan alkohol mengalami penurunan namun kemudian meningkat karena mulai banyak remaja yang terpengaruh dari lingkungan sehingga remaja yang coba konsumsi alkohol sehingga populasi yang mengalami kecanduan juga mengalami peningkatan. Maka, populasi yang kecanduan alkohol akan semakin meningkat hingga pecandu akan semakin banyak seiring berjalannya waktu.

Hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai rujukan untuk peneliti selanjutnya yang ingin meneliti tentang kecanduan alkohol dengan metode yang berbeda.

REFERENCES

- AZIZAH, N., & RUDIANTO, B. (2021). Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Fraksional Linier Orde Berbeda Menggunakan Transformasi Laplace. *Jurnal Matematika UNAND*, 9(4), 318. <https://doi.org/10.25077/jmu.9.4.318-329.2020>

- Fadhilah, J., & Maulana, D. A. (2022). Model Dinamika Kecanduan Rokok Pada Pria Dan Wanita. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 10(1), 180–189. <https://doi.org/10.26740/mathunesa.v10n1.p180-189>
- Hakim, L. (2013). *Model Matematika Tentang Pengaruh Alkohol Terhadap Kesehatan dan Perkembangan Sosial* (Vol. 2, Issue 1).
- Ndii, M. Z. (2022). *Pemodelan Matematika* (M. Nasrudin (ed.); Pertama). PT. Nasya Expanding Management. https://books.google.co.id/books?id=7ExhEAAAQBAJ&pg=PA68&dq=Kriteria+Routh+hurwitz&hl=id&newbks=1&newbks_redir=0&source=gb_mobile_search&ovdme=1&sa=X&ved=2ahUKEwjZv8yzup-IAxUSS2wGHXBDAoUQ6wF6BAGFEAU#v=onepage&q=Kriteria Routh hurwitz&f=false.
- Priangguna, C. (2014). Perilaku Mengkonsumsi Minuman beralkohol pada Mahasiswa Fakultas Ilmu Pendidikan UNESA PERILAKU MENGGONSUMSI MINUMAN BERALKOHOL PADA MAHASISWA FAKULTAS ILMU PENDIDIKAN UNIVERSITAS NEGERI SURABAYA CONSUME ALCOHOL BEHAVIOR STUDENTS FACULTY OF EDUCATION SURA. *Jurnal BK UNESA*, 4(3), 1–7. <http://batam.tribunnews.com>
- Sukri, F. (2020). *ANALISA KADAR TRIGLISERIDA PADA PENGONSUMSI MINUMAN BERALKOHOL USIA 15-18 TAHUN DI DESA LOBUK BANGKALAN*. 157.
- Taroreh dkk dalam Deshpande, S. (2013). Hubungan Pengetahuan dengan Sikap Masyarakat dalam Mengkonsumsi Minuman Beralkohol di Desa Lomaya Kabupaten Bone Bolango. *Journal of the American Chemical Society*, 123(10), 2176–2181. <https://shodhganga.inflibnet.ac.in/jspui/handle/10603/7385>