J-MATH
Journal of Mathematics Theory and Applications
Vol. 3, No. 2, April 2025, pp. 30 – 36
ISSN Online: 3025-2628

Aplikasi Teorema Polya dalam Menentukan Banyaknya Cara Pewarnaan Permukaan Oktahedron dengan m-Warna

Anggelica Yunita Liu[1], Nugraha K. F. Dethan[2*], Fitriani[3]
[1,2*]Program Studi Matematika, Universitas Timor,
[3] Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Timor,
anggelicayunitaliu@gmail.com[1], nugrahadethan@unimor.ac.id[2], bhrfitriani@gmail.com[3]

ABSTRACT

One application of the permutation group concept is related to solving enumeration problems and one method that can solve this problem is Polya's Theorem. Polya's theorem is a calculation technique that combines abstract algebraic structures with combinatorics and can be used to calculate objects in permutation groups. A regular octahedron is an octahedron composed of eight equilateral triangles and the four sides of the octahedron meet at each vertex and have twelve edges. In 2015, research was carried out on the many ways to color the surface of a cube with m-colors. This research aims to determine the number of ways to color the surface of an octahedron with m-colors by using the Polya theorem and permutation groups to determine the rotational symmetry group formed by the octahedron as well as the number of cycle indices formed from each element in the rotational symmetry group itself. Based on the research results, it is obtained that the rotational symmetry group formed by the octahedron is S_4 and the number of cycle indices of the octahedron permutation group is $Z(G) = \frac{1}{24}(x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2)$. After substituting the symmetry index and cycle index into the Polya theorem formula, we can conclude that the number of ways to color the octahedron surface with m-colors is $\frac{1}{24}(m^8 + 17m^4 + 6m^2)$.

Keywords: *Polya's Theorem, Octahedron, Permutation Group, Rotational Symmetry Group.*

ABSTRAK

Salah satu penggunaan konsep grup permutasi berhubungan dengan penyelesaian permasalahan enumerasi dan salah satu metode yang dapat menyelesaikan permasalahan ini adalah Teorema Polya. Teorema polya merupakan suatu teknik perhitungan yang menggabungkan struktur aljabar abstrak dengan kombinatorika dan dapat digunakan untuk menghitung objek dalam grup permutasi. Oktahedron beraturan merupakan sebuah oktahedron yang tersusun atas delapan buah segitiga sama sisi dan empat buah sisi dari oktahedron bertemu di masing masing titik sudut dan mempunyai dua belas rusuk. Pada tahun 2015, dilakukan penelitian mengenai banyaknya cara pewarnaan permukaan kubus dengan m-warna. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan banyaknya cara dalam pewarnaan permukaan oktahedron dengan m-warna dengan menggunakan teorema polya dan grup permutasi untuk menentukkan grup simetri rotasi yang dibentuk oleh oktahedron serta banyaknya indeks sikel yang dibentuk dari setiap elemen pada grup simetri rotasi itu sendiri. Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh grup simetri rotasi yang dibentuk oleh oktahedron adalah S_4 dan banyaknya indeks sikel dari grup permutasi oktahedron adalah $Z(G) = \frac{1}{24}(x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2)$. Setelah mengsubstitusikan indeks simetri dan indeks sikel ke rumus teorema polya, maka diperoleh kesimpulan bahwa banyaknya cara pewarnaan permukaan oktahedron dengan m-warna adalah $\frac{1}{24}(m^8 + 17m^4 + 6m^2)$.

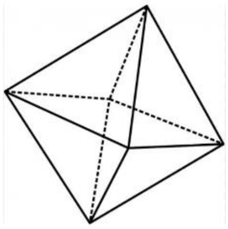
Kata Kunci: Teorema Polya, Oktahedron, Grup Permutasi, Grup Simetri Rotasi.

PENDAHULUAN

Ilmu matematika merupakan ilmu yang dapat diaplikasikan di berbagai bidang. Kajian matematika umumnya dibedakan menjadi matematika murni dan matematika terapan. Kajian matematika murni salah satunya adalah aljabar. Aljabar dimulai dari himpunan dan operasi. Salah satu cabang dari ilmu aljabar adalah aljabar abstrak dan salah satu bidang yang dipelajari dalam ilmu aljabar abstrak adalah grup. Grup merupakan himpunan yang dilengkapi satu operasi. Salah satu bentuk grup adalah grup permutasi. Grup permutasi merupakan pengembangan dari aljabar klasik. Grup permutasi adalah sebuah grup yang elemen-elemennya merupakan permutasi (fungsi bijektif) dari suatu himpunan tak kosong dengan operasi komposisi sebagai operasi binernya. Salah satu contoh dari grup permutasi adalah grup simetri (Kleiner, 1986). Grup simetri merupakan grup yang dibentuk dari suatu himpunan yang isinya merupakan permutasi-permutasi. Sedangkan grup simetri rotasi merupakan grup simetri yang dikenai transformasi rotasi (Ray & Steven, 2022).

Salah satu penggunaan konsep grup permutasi berhubungan dengan penyelesaian permasalahan enumerasi dan salah satu metode yang dapat menyelesaikan permasalahan ini adalah Teorema Polya. Teorema polya merupakan suatu teknik perhitungan yang menggabungkan struktur aljabar abstrak dengan kombinatorika (Rosalianti, 2013) dan dapat digunakan untuk menghitung objek dalam grup permutasi (Badar & Iqbal, 2010).

Oktahedron beraturan merupakan sebuah oktahedron yang tersusun atas delapan buah segitiga sama sisi dan empat buah sisi dari oktahedron bertemu di masing-masing titik sudut dan mempunyai dua belas rusuk. Oktahedron beraturan termasuk bangun ruang platonik (*platonic solid)*. Bangun ruang platonik adalah bangun ruang yang dibangun oleh poligon yang kongruen, semua rusuknya sama panjang, semua sudut permukaannya sama besar (Baker & Kudroli, 2010). Gambar 1 merupakan gambar dari oktahedron beraturan



Gambar 1. Oktahedron Beraturan

Pada penelitian sebelumnya, Bell (2015) menjelaskan pada tesisnya yang berjudul *"Polya's Enumeration Theorem and Its Applications"* tentang banyaknya cara pewarnaan permukaan kubus dengan m-warna. Pada penelitian ini, penulis akan menentukan banyaknya cara dalam pewarnaan permukaan oktahedron dengan m-warna dengan menggunakan teorema polya dan grup permutasi untuk menentukkan grup simetri rotasi yang dibentuk oleh oktahedron serta banyaknya indeks sikel yang dibentuk dari setiap elemen pada grup simetri rotasi itu sendiri. Untuk menyelesaikan permasalahan ini, diperlukan beberapa penjelasan teori.

Pada bagian ini, akan disajikan konsep grup permutasi, indeks sikel, Lema Burnside dan Teorema Polya.

Definisi 1 (Dummit, 2004)**.** Suatu operasi biner $*$ pada himpunan G adalah fungsi $* : G \times G \to G$. Untuk setiap $a, b \in G$ ditulis $a * b$ untuk $*\,(a, b)$.

Definisi 2 (Durbin, 2005)**.** Grup adalah himpunan G dengan operasi biner $*$ pada G yang memenuhi setiap aksioma berikut:

(G1) $a * (b * c) = (a * b) * c$ untuk setiap $a, b, c \in G$ (sifat asosiatif)

(G2) Terdapat $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in G$ (memiliki elemen identitas)

(G3) Untuk setiap $a \in G$, terdapat $b \in G$ sehingga $a * b = b * a = e$ (memiliki elemen invers).

Definisi 3 (Herstein, 1996)**.** Pemetaan $\phi : A \to B$ disebut bijektif jika ϕ merupakan injektif dan surjektif.

Definisi 4 (Fraleigh & Katz, 2003). Sebuah permutasi dari suatu himpunan A adalah fungsi $\phi : A \to A$ yang bijektif.

Contoh 1. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $f : A \to A$ yang memenuhi $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$ dan $f(4) = 4$, maka f adalah permutasi dari A dan ditulis $f = \binom{1\ 2\ 3\ 4}{2\ 3\ 1\ 4}$ atau dapat ditulis (1 2 3)(4).

Himpunan permutasi dari A membentuk sebuah grup yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 5 (Gallian, 2010). Misalkan $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Himpunan dari semua permutasi pada A disebut grup simetri berderajat n dan dinotasikan dengan S_n. Elemen elemen dari S_n memiliki bentuk sebagai berikut:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \dots & \alpha(n) \end{pmatrix}$$

Definisi 6 (Jamil, 2015). Misalkan S_n adalah grup simetri. Jika terdapat bilangan positif k sedemikian hingga $x, f(x), f^2(x), \dots,\ f^{k-1}(x)$ semuanya berbeda dan $f^k(x) = x$, maka $(x\ \ f(x)\ f^2(x) \dots\ f^{k-1}(x))$ adalah sikel dengan panjang k.

Definisi 7 (Malik & Mordeson, 2007)**.** Suatu sikel disebut transposisi jika $k = 2$.

Definisi 8 (Rotman, 1995)**.** Permutasi ganjil adalah permutasi yang merupakan komposisi dari transposisi berjumlah ganjil.

Berikut ini akan dibahas mengenai beberapa subgrup dari grup simetri.

Definisi 9 (Gallian, 2010). Grup permutasi dari himpunan A adalah himpunan permutasi dari A yang membentuk grup dalam fungsi komposisi.

Definisi 10 (Gallian, 2010).. Grup Dihedral adalah subgrup dari S_n yang anggotanya merupakan himpunan semua permutasi yang bersesuaian dengan rotasi dan refleksi dari segi-n beraturan dan grup dihedral memuat elemen sebanyak $2n$.

Definisi 11 (Jamil, 2015). Misalkan X adalah himpunan dan G adalah grup. Sebuah aksi dari G pada X adalah pemetaan $* : G \times X \ \to X$ yang memenuhi:

1. $ex = x$ untuk setiap $x \in X$
2. $(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2 x)$ untuk setiap $x \in X$ dan semua $g_1, g_2 \in G$

Dalam hal ini, X disebut G-*set.*

Pada bagian ini akan dibahas mengenai orbit, penstabil, titik tetap permutasi dari sebuah himpunan dan teorema *orbit-stabilizer.*

Definisi 12 (Gallian, 2010). Misalkan G adalah sebuah grup permutasi dari himpunan S. Untuk setiap s $\in S$, $orb_G(s) = \{\phi(s) : \phi \in G\}$. Himpunan $orb_G(s)$ adalah himpunan bagian dari S yang disebut orbit dari s dibawah G. Jumlah elemen dari $orb_G(s)$ dinotasikan dengan $|orb_G(s)|$.

Definisi 13 (Gallian, 2010). Misalkan G adalah sebuah grup permutasi dari himpunan S. Untuk setiap i $\in S$, $stab_G(i) = \{\ \phi \in G : \phi(i) = i\}$. $Stab_G(i)$ disebut penstabil dari i dalam G.

Definisi 14 (Jamil, 2015)**.** Misalkan G adalah sebuah grup permutasi dari himpunan S. $F(\phi) = \{i \in S : \phi(i) = i\}$, i disebut sebagai titik tetap dari ϕ dan $F(\phi)$ adalah himpunan semua titik titik tetap dari permutasi $\phi \in G$.

Teorema 1 . Misalkan G adalah grup permutasi berhingga dari himpunan S. Maka untuk setiap $i \in S$, $|orb_G(i)|.|stab_G(i)| = |G|$.

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai indeks sikel.

Definisi 15 (Nasseef, 2016). Diberikan G adalah grup permutasi dari suatu himpunan yang banyak anggotanya n dan $g \in G$ adalah komposisi dari sikel-sikel yang disjoint yang terdiri dari sikel dengan panjang 1 sebanyak a_1, sikel dengan panjang 2 sebanyak a_2, ..., sikel dengan panjang n sebanyak a_n, yang memenuhi $1a_1 + 2a_2 \ + \dots + na_n = n$, maka indeks sikel g didefinisikan sebagai $Z(g; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \dots x_n^{a_n}$

Serta indeks sikel dari grup permutasi G didefinisikan sebagai

$$Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} Z(g; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

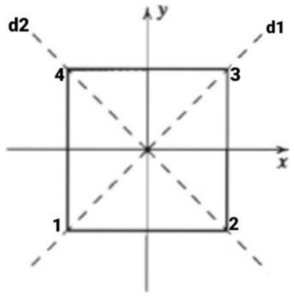
Contoh 2. Misalkan $p = (1)(2)(3) \in S_3$, permutasi p memiliki tiga sikel dengan panjang satu, sehingga tipe permutasi p adalah $[3, 0, 0]$ dan indeks sikel p adalah $x_1^3 x_2^0 x_3^0 = x_1^3$.

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai Lema Burnside, Teorema Polya dan perbedaannya
Lema 1. Misalkan X adalah $G - set$ dengan G dan X berhingga. Jika n adalah banyaknya orbit di X pada G, maka:

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$$

Teorema 2 (Jamil, 2015). Diberikan $C = \{f, f: X \to Y\}$ dengan $|X| = n \geq 2$ dan $|Y| = r.$ Jika G merupakan grup permutasi yang beraksi pada X dengan indeks sikel $Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, maka banyaknya pola di C terhadap G adalah $Z(G; r, r, r, \dots, r)$
Bukti: Jika $g \in G$, maka $f \in F(g) \leftrightarrow f$ tetap oleh tiap-tiap sikel dari g. Dan jika g adalah permutasi bertipe $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ maka $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ menyatakan banyaknya sikel disjoint di g, sehingga banyaknya permutasi yang tetap oleh g adalah $r^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$. Jadi, diperoleh $|F(g)| = r^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ dengan $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ adalah tipe permutasi g. Berdasarkan Lema Burnside, banyaknya orbit yang berbeda adalah $n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} r^{a_1} . r^{a_2} \dots r^{a_n} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} z(g; r, r, r, \dots, r) = Z(G; r, r, r, \dots, r).$
Perbedaan Lema Burnside dan Teorema Polya adalah dalam Lema Burnside, diperlukan orbit elemen dari masing-masing sikel grup untuk menentukan banyaknya pola yang mungkin. Sedangkan dalam Teorema Polya, hanya memerlukan indeks sikel dari elemen-elemen grup untuk menghitung banyaknya pola. Berikut ini akan ditampilkan contoh antara perbedaan penggunaan Teorema Polya dan Lema Burnside.

Contoh 3. Berapa banyak cara mewarnai sudut dari persegi dengan tiga warna? Gambar 2 merupakan gambar dari segi empat beraturan beserta sumbu refleksinya



Gambar 2. Segi Empat Beraturan Beserta Sumbu Refleksinya

Permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep grup dihedral D_4. Dari Lema 1 dan Gambar 2, akan dicari $F(g)$ atau titik tetap permutasi dari setiap elemen grup dihedral D_4. Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4\}$ adalah $G - set$ dari grup dihedral D_4.

1. Dengan menggunakan Lema Burnside
   a) $e = \binom{1\,2\,3\,4}{1\,2\,3\,4} = (1)(2)(3)(4)$
      maka, $|F(e)| = 3^4 = 81$
   b) $r_1 = \binom{1\,2\,3\,4}{2\,3\,4\,1} = (1\;2\;3\;4)$
      maka, $|F(r_1)| = 3^1 = 1$
   c) $r_2 = \binom{1\,2\,3\,4}{3\,4\,1\,2} = (1\;3)(2\;4)$
      maka, $|F(r_2)| = 3^2 = 9$
   d) $r_3 = \binom{1\,2\,3\,4}{4\,1\,2\,3} = (1\;4\;3\;2)$
      maka, $|F(r_3)| = 3^1 = 1$
   e) $r_x = \binom{1\,2\,3\,4}{4\,3\,2\,1} = (1\;4)(2\;3)$
      maka, $|F(r_x)| = 3^2 = 9$
   f) $r_y = \binom{1\,2\,3\,4}{2\,1\,4\,3} = (1\;2)(3\;4)$

maka, $\left|F\left(r_y\right)\right| = 3^2 = 9$

g) $r_{d_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2)(4)$

maka, $\left|F\left(r_{d_1}\right)\right| = 3^3 = 27$

h) $r_{d_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 4)(1)(3)$

maka, $\left|F\left(r_{d_2}\right)\right| = 3^3 = 27$

Sehingga diperoleh $n = \frac{1}{|D_4|}\sum_{g \in D_4}|F(g)| = \frac{1}{8}[81+3+9+3+9+9+27+27] = \frac{1}{8}[168] = 21$

Dapat diperoleh kesimpulan bahwa terdapat 21 pewarnaan untuk mewarnai sudut persegi dengan tiga warna.

2. Dengan Menggunakan Teorema Polya

Pertama, akan diuraikan semua elemen dari grup dihedral D_4 dalam Tabel 1.

Tabel 1. Elemen-Elemen Dari Grup Dihedral D_4

D_4
(1)(2)(3)(4)
(1 2 3 4)
(1 3)(2 4)
(1 4 3 2)
(1 4)(2 3)
(1 2)(3 4)
(1 3)(2)(4)
(2 4)(1)(3)

Sehingga, indeks sikel dari D_4 adalah $Z(D_4) = \frac{1}{8}[x_1^4 + 3x_2^2 + 2x_1^2x_2 + 2x_4]$

Lalu substitusikan nilai $x_1 = x_2 = x_4 = 3$ pada $Z(D_4)$, sehingga diperoleh $Z(D_4)(3, 3, 3{,}3) = \frac{1}{8}[3^4 + 3.3^2 + 2.3^2.3 + 2.3] = \frac{1}{8}[81 + 27 + 54 + 6] = \frac{1}{8}[168] = 21$.

Dapat diperoleh kesimpulan bahwa terdapat 21 pewarnaan dan hasil tersebut sesuai dengan hasil perhitungan dengan menggunakan Lema Burnside.

METODE

a. Studi Literatur

Pada tahap ini, dilakukan pengumpulan referensi mengenai Teorema Polya dan Oktahedron melalui jurnal-jurnal ilmiah dan buku-buku literatur yang relevan dengan penelitian penulis.

b. Mencari Grup Simetri Rotasi yang dibentuk oleh Oktahedron

Pada tahap ini dicari grup simetri rotasi yang dibentuk oleh oktahedron dengan cara menganalisa grup simetri lainnya yang isomorfik dengan grup simetri rotasi pada oktahedron.

c. Menghitung Indeks Sikel

Pada tahap ini dibentuk indeks sikel baru dengan cara menjumlahkan indeks sikel dari setiap elemen permutasi pada oktahedron untuk memperoleh indeks sikel dari grup permutasi G.

d. Mengsubstitusikan ke Teorema Polya

Pada tahap ini disubstitusikan indeks simetri ($|G|$) dan indeks sikel dari grup permutasi sebuah oktahedron yang telah diperoleh ke Teorema Polya untuk memperoleh hasil akhir yaitu mendapatkan banyaknya cara pewarnaan permukaan oktahedron dengan m-warna.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Diberikan himpunan sisi $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ yang merupakan himpunan sisi dari sebuah oktahedron dan dikenakan permutasi yang bersesuaian dengan rotasi dan refleksi. Rotasi dan refleksi yang bersesuaian pada oktahedron adalah rotasi dan refleksi yang dapat mempertahankan bentuk dari oktahedron atau disebut dengan rotasi simetri. Rotasi dan refleksi tersebut adalah rotasi 0° atau 360° yang akan diaplikasikan ke setiap pasang titik sudut yang saling berhadapan, setiap pasang sisi yang saling berhadapan dan setiap pasang rusuk yang saling berhadapan dan telah diberi sumbu. Rotasi 90°, rotasi 180° atau refleksi dan rotasi 270° akan diaplikasikan ke setiap pasang titik sudut yang saling berhadapan dan telah diberi sumbu, rotasi 120° dan rotasi 240° akan diaplikasikan ke setiap pasang sisi yang saling berhadapan dan telah diberi sumbu serta rotasi 180° atau refleksi yang akan diaplikasikan ke setiap pasang rusuk yang saling berhadapan dan telah diberi sumbu.

Tipe-tipe rotasi pada oktahedron terdiri atas permutasi identitas, rotasi terhadap titik sudut pada oktahedron, rotasi terhadap sisi pada oktahedron dan rotasi terhadap rusuk pada oktahedron.

Setelah merotasikan oktahedron terhadap titik sudut, sisi dan rusuk dengan menggunakan sudut-sudut yang bersesuaian, maka diperoleh elemen elemen permutasi dari oktahedron adalah sebagai berikut:

1. Permutasi identitas : $(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$.
2. Rotasi terhadap titik sudut pada oktahedron : $(1\ 4\ 3\ 2)(5\ 6\ 7\ 8), (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8), (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 8\ 7\ 6), (1\ 5\ 6\ 4)(2\ 8\ 7\ 3)$, $(1\ 6)(2\ 7)(3\ 8)(4\ 5), (1\ 4\ 6\ 5)(2\ 3\ 7\ 8), (1\ 2\ 8\ 5)(3\ 7\ 6\ 4), (1\ 8)(2\ 5)(3\ 6)(4\ 7)$, $(1\ 5\ 8\ 2)(3\ 4\ 6\ 7)$.
3. Rotasi terhadap sisi pada oktahedron : $(1)(7)(2\ 4\ 5)(3\ 6\ 8), (1)(7)(2\ 5\ 4)(3\ 8\ 6)$, $(2)(6)(1\ 8\ 3)(4\ 5\ 7), (2)(6)(1\ 3\ 8)(4\ 7\ 5), (3)(5)(1\ 8\ 6)(2\ 7\ 4)$, $(3)(5)(1\ 6\ 8)(2\ 4\ 7), (4)(8)(1\ 3\ 6)(2\ 7\ 5), (4)(8)(1\ 6\ 3)(2\ 5\ 7)$.
4. Rotasi terhadap rusuk pada octahedron : $(1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8)$, $(1\ 7)(2\ 8)(3\ 5)(4\ 6), (1\ 4)(2\ 6)(3\ 5)(7\ 8), (1\ 7)(2\ 6)(3\ 4)(5\ 8)$, $(1\ 2)(3\ 5)(4\ 8)(6\ 7), (1\ 7)(2\ 3)(4\ 8)(5\ 6)$.

Elemen-elemen permutasi dari oktahedron tersebut dinotasikan dengan G. Karena G mempermutasikan 4 diagonal dari sisi sisi yang saling berhadapan pada oktahedron dan S_4 adalah grup permutasi dari 4 elemen, maka $G \subseteq S_4$. Karena $|G| = 24 = |S_4|$, maka $G \cong S_4$ sehingga G adalah grup permutasi dan grup simetri rotasi yang dibentuk oleh oktahedron adalah S_4.

Selanjutnya dari elemen-elemen permutasi tersebut akan diperoleh tipe permutasi dan indeks sikel permutasi sebagai berikut :

1. Bentuk $[8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ sebanyak 1 dengan indeks sikelnya x_1^8
2. Bentuk $[0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0]$ sebanyak 6 dengan indeks sikelnya x_4^2
3. Bentuk $[0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ sebanyak 9 dengan indeks sikelnya x_2^4
4. Bentuk $[2, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0]$ sebanyak 8 dengan indeks sikelnya $x_1^2 x_3^2$

Sehingga diperoleh indeks sikel dari grup permutasi oktahedron adalah $\frac{1}{24}(x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2)$.

Setelah memperoleh indeks simteri dan indeks sikel dari grup permutasi oktahedron, maka dapat dihitung banyaknya cara pewarnaan permukaan oktahedron dengan m-warna dengan menggunakan Teorema Polya. Misalkan G merupakan grup permutasi oktahedron yang beraksi pada X dengan indeks sikel $Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, maka banyaknya pola di C terhadap G adalah $Z(G) = \frac{1}{24}(x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2)$. Lalu substitusikan $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = m$, sehingga diperoleh $Z(G)(m, m, m, m) = \frac{1}{24}(m^8 + 6m^2 + 9m^4 + 8m^2.m^2) = \frac{1}{24}(m^8 + 6m^2 + 9m^4 + 8m^4) = \frac{1}{24}(m^8 + 17m^4 + 6m^2)$.

KESIMPULAN DAN SARAN

a. Kesimpulan

   Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa grup simteri rotasi yang dibentuk oleh oktahedron adalah S_4, banyaknya indeks sikel yang dibentuk oleh grup permutasi oktahedron adalah $Z(G) = \frac{1}{24}(x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2)$ serta banyaknya cara pewarnaan permukaan oktahedron dengan m-warna yang dihitung menggunakan Teorema Polya adalah $\frac{1}{24}(m^8 + 17m^4 + 6m^2)$.

b. Saran

   Bagi peneliti selanjutnya agar dapat meneliti tentang banyaknya cara pewarnaan dengan m-warna pada *platonic solid* lainnya yang belum pernah diteliti dan lebih banyak sisi seperti Dodecahedron dan Icosahedron.

REFERENCES

Kleiner, I. (1986). The evolution of group theory: A brief survey. *Mathematics Magazine*, 59(4), 195–215.

Ray, & Steven. (2022). Pengolahan citra digital pada pembuatan motif keramik menggunakan grup simetri [Online]. Universitas Kristen Satya Wacana Repository. https://repository.uksw.edu/handle/123456789/24356.

Rosalianti, V. T., Suhery, C., & Kusumastuti, N. (2013). Penggunaan teorema Polya dalam menentukan banyaknya graf sederhana yang tidak saling isomorfis. *Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya (BIMASTER)*, 2, 39–44.

Badar, M., & Iqbal, A. (2010). *Polya's enumeration theorem*. Linneaus University.

Baker, J., & Kudrolli, A. (2010). Maximum and minimum stable random packings of Platonic solids. *American Physical Society,* 82(6): 1-5.

von Bell, M. (2015). *Polya's enumeration theorem and its applications*. University of Helsinki Open Repository. https://ethesis-old.helsinki.fi/repository/handle/10138.1/5228.

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract algebra* (3rd ed.). John Wiley & Sons.

Durbin, J. R. (2005). *Modern algebra: An introduction* (6th ed.). Laurie Rosatone.

Herstein, I. N. (1996). *Abstract algebra* (3rd ed.). John Wiley & Sons.

Fraleigh, J. B., & Katz, V. J. (2003). *A first course in abstract algebra*. Pearson Education.

Gallian, J. A. (2010). *Contemporary abstract algebra* (7th ed.). Brooks-Cole/Cengage Learning.