J-MATH
Journal of Mathematics Theory and Applications
Vol. 2, No. 1, Oktober 2023, pp. 36 – 45
ISSN Online: 3025-2628

Kajian Teorema Bolzano-Weierstrass untuk Mengkonstruksi Barisan yang Konvergen di $\mathbb{R}^n$ dan Aplikasinya dalam Pembuktian Teorema Eksistensi Max-Min

Alfonsus Liquria Loin[1*], Nugraha K. F. Dethan[2], Grandianus Seda Mada[3]
[1*,2,3]Program Studi Matematika, Universitas Timor,
alfonsloin@gmail.com, nugradethan@unimor.ac.id, grandianusmada@gmail.com

Received	Revised	Accepted	Online
hh-bb-20xx	hh-bb-20xx	hh-bb-20xx	hh-bb-20xx

ABSTRACT

A sequence is a function from the set of natural numbers to the set of real numbers ($f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$). In sequences there is the concept of sequence convergence. Testing the convergence of a sequence can be done using the Bolzano-Weierstrass Theorem. This theorem states that every finite sequence has a convergent sequence. The relationship between convergent sequences and finite sequences is also important to study further. Apart from being used to prove the convergence of sequences, the Bolzano-Weirstrass Theorem can also be applied to prove the Max-Min Existence Theorem. This research was conducted to examine the relationship between convergent sequences and finite sequences, the relationship between convergence and continuous functions and the relationship between continuous functions and max-min values with the aim of constructing a convergent sequence in R^n and its application in proving the Max-Min Existence Theorem. This research is a literature study. This research was conducted through a literature review of books and other literature. From the literature review, the materials are then discussed in depth. The results of the literature study show that a convergent sequence is a finite sequence, but a finite sequence is not necessarily convergent. In determining the convergence of a sequence using the Bolzano-Weierstrass Theorem, it is necessary to first show the limitations of the sequence. Furthermore, to prove the Max-Min Existence Theorem it is necessary to require that the sequence is finite and then this theorem can be proven using the Bolzano-Weierstrass Theorem and Apit Theorem.
Keywords: *Monotonous Sequence, Finite Sequence, Continuity, Bolzano-Weierstrass Theorem, Max-Min Existence Theorem.*

ABSTRAK

Barisan adalah fungsi dari himpunan bilangan asli ke himpunan bilangan real ($f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Dalam barisan terdapat konsep kekonvergenan barisan. Pengujian kekonvergenan suatu barisan dapat dilakukan dengan Teorema Bolzano-Weierstrass. Teorema ini mengatakan setiap barisan yang terbatas mempunyai barisan bagian yang konvergen. Kaitan antara barisan konvergen dan barisan terbatas juga penting untuk dikaji lebih lanjut. Selain digunakan untuk membuktikan kekonvergenan barisan, Teorema Bolzano-Weirstrass juga dapat diaplikasikan untuk membuktikan Teorema Eksistensi Maks-Min. Penelitian ini dilakukan untuk mengkaji kaitan antara barisan konvergen dan barisan terbatas, kaitan antara kekonvergenan dan fungsi kontinu serta kaitan antara fungsi kontinu dan nilai maks-min dengan tujuan untuk mengkonstruksi barisan konvergen di $\mathbb{R}^n$ dan aplikasinya dalam pembuktian Teorema Eksistensi Maks-Min. Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka. Penelitian ini dilakukan melalui kajian pustaka terhadap buku-buku dan literatur lainnya. Dari kajian pustaka tersebut, kemudian dibahas materi-materinya secara mendalam. Hasil studi pustaka menunjukkan bahwa suatu barisan yang konvergen merupakan barisan terbatas tetapi barisan yang terbatas belum tentu konvergen. Dalam menentukan kekonvergenan suatu barisan dengan Teorema Bolzano-Weierstrass perlu ditunjukan terlebih dahulu keterbatasan barisan tersebut. Selanjutnya untuk membuktikan Teorema Eksistensi Maks-Min perlu disyaratkan bahwa barisan tersebut terbatas dan kemudian teorema tersebut dapat dibuktikan dengan menggunakan Teorema Bolzano-Weierstrass dan Teorema Apit.
Kata Kunci*:* *Barisan Monoton, Barisan Terbatas, Kekontinuan, Teorema Bolzano-Weierstrass, Teorema Eksistensi Max-Min.*

PENDAHULUAN

Matematika memiliki peran penting dalam berbagai bidang kehidupan dan disiplin ilmu, sehingga memerlukan adanya pengembangan yang lebih lanjut untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan dalam matematika itu sendiri, maupun di luar yang belum terselesaikan. Dalam setiap perkembangan ilmu pengetahuan, setiap manusia dituntut untuk bisa menemukan sesuatu yang baru yang merupakan kelanjutan dari ilmu pengetahuan itu sendiri, sehingga ilmu tersebut tidak berhenti pada satu titik kulminasi, karena sifat ilmu pengetahuan yang selalu mengalami perubahan dari waktu ke waktu. Dalam matematika barisan adalah salah satu bagian yang memiliki sifat-sifat yang sangat menarik untuk dikaji lebih lanjut. Barisan tersebut merupakan fungsi dari himpunan bilangan asli ke himpunan bilangan real ($f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$). Barisan juga sebagai salah satu bagian dari matematika analisis yang telah mengalami berbagai perkembangan ke arah yang lebih spesifik dengan munculnya sifat- sifat dasar dari barisan bernilai real salah satunya adalah kekonvergenan barisan. Konvergen itu adalah bersifat menuju satu titik pertemuan dan bersifat memusat. Suatu barisan dikatakan konvergen jika dan hanya jika limit barisannya ada. Dalam menguji suatu barisan konvergen atau tidak, dapat lakukan dengan menggunakan teorema Bolzano-Weierstrass sebagai referensi. Teorema ini mengatakan bahwa setiap barisan terbatas mempunyai barisan bagian yang konvergen. Dari teorema Bolzano-Weierstrass tersebut, akan dikaji lebih jauh mengenai keterbatasan suatu barisan dan bagaimana hubungannya dengan barisan yang konvergen. Barisan-barisan yang sifatnya memusat dan konvergen akan banyak membantu membahas fungsi-fungsi yang sifatnya kontinu, sehingga dari fungsi yang kontinu tersebut kita bisa mempunyai titik maksimum-minimum. Karena dari teorema Maks-Min syarat untuk maks-min itu harus mempunyai fungsi yang kontinu dalam suatu interval terbatas dan tertutup. Lebih jauhnya yang akan banyak dikaji dalam skripsi ini adalah tentang bagaimana mengkonstruksi/membangun suatu barisan tersebut konvergen atau pun tidak menggunakan teorema Bolzano-Weierstrass dan aplikasi dalam pembuktian teorema Eksistensi Maks-Min. Dalam matematika, maksimun dan minimum adalah nilai terbesar dan terkecil dari fungsi, baik dalam kisaran tertentu (ekstrim lokal atau relatif) atau diseluruh domain dari fungsi (ekstrim global atau absolut). Dalam masalah sehari-hari nilai maksimum dan minimum sering muncul dan membutuhkan cara penyelesaian. Terdapat teorema yang dikenal dengan teorema Eksistensi Maks-Min, merupakan salah satu teorema yang menyatakaan bahwa jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, maka f mempunyai nilai maksimum dan minimum. Teorema ini memberikan syarat cukup suatu fungsi agar memiliki nilai maksimum dan minimum. Pada penelitian ini, teorema ini akan dibuktikan dengan memanfaatkan kajian mengenai teorema Bolzano-Weierstrass. Dari uraian di atas maka penulis ingin mengangkat judul "Kajian Teorema Bolzano-Weierstrass untuk Mengkonstruksi Barisan yang Konvergen di $\mathbb{R}^n$ dan Aplikasinya dalam Pembuktian Teorema Eksistensi Max-Min", sebagai judul skripsi. Ada dua rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu: Bagaimana menentukan kekonvergenan suatu barisan menggunakan teorema Bolzano-Weierstrass? Dan bagaimana membuktikan teorema Eksistensi Maks-Min menggunakan teorema Bolzano-Weierstrass? Serta dengan tujuannya yaitu: Mengetahui bagaimana menentukan suatu barisan konvergen di $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ dengan teorema Bolzano-Weierstrass dan mengetahui pembuktian teorema Eksistensi Maks-Min dengan menggunakan teorema Bolzano-Weierstrass. Adapun mamfaat dari penelitian ini yaitu mendapatkan suatu wawasan dan pengetahuan tentang pengujian kekonvergenan barisan bernilai real dan pembuktian teorema Eksistensi Maks-Min dengan menggunakan teorema Bolzano-Weierstrass.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yaitu menghimpun beberapa sumber referensi dan dibuat suatu kajian khusus mengenai Teorema Bolzano-Weierstrass untuk Mengkonstruksi Barisan yang Konvergen di $\mathbb{R}^n$ dan Aplikasinya dalam Pembuktian Teorema Eksistensi

Maks-Min. Sumber kajian dan penulisan diperoleh dari buku-buku referensi, jurnal-jurnal ilmiah, dan artikel web lainnya. Kajian ini merupakan penelitian yang bersifat murni atau penelitian dasar. Adapun langkah-langkah kajian adalah sebagai berikut: 1) Memaparkan definisi fungsi kontinu, definisi kekonvergenan, urutan bilangan real, nilai mutlak, persekitaran, interval bersarang, barisan bilangan real, limit barisan, ekor barisan, kemonotonan, barisan bagian, konvergen pada $\mathbb{R}^n$ serta konsep-konsep matematika lainnya yang menunjang kajian Teorema Bolzano-Weierstrass untuk Mengkonstruksi Barisan yang Konvergen di $\mathbb{R}^n$ dan Aplikasinya dalam Pembuktian Teorema Eksistensi Max-Min. 2) Mendefinisikan dan membuktikan teorema-teorema mengenai sifat-sifat kelengkapan bilangan real berdasarkan definisi dan sifat-sifat utama bilangan real untuk Teorema Bolzano-Weierstrass sesuai dengan sifat-sifat yang berlaku pada bilangan real. Dan kemudian mengaplikasikan Teorema Bolzano-Weierstrass untuk membuktikan Teorema Eksistensi Max-Min. 3)Memberikan kesimpulan dalam bentuk teorema,proposisi, dan lemma atau akibat terbukti atas pengkajian ini. Adapun hasil yang diharapkan dari penelitian ini antara lain: 1)Mengetahui bagaimana menentukan suatu barisan konvergen di $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ dengan teorema Bolzano-Weierstrass. 2) Mengetahui pembuktian teorema Eksistensi Max-Min dengan menggunakan teorema Bolzano-Weierstrass.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Penentukan Kekonvergenan Barisan

A. Menentukan Hubungan antara Barisan Konvergen dan Barisan Terbatas

Teorema 2.9.3 berbicara mengenai kaitan antara barisan konvergen dan barisan terbatas, yaitu setiap barisan yang konvergen adalah terbatas. Untuk mengetahui hubungan antara barisan konvergen dan barisan terbatas, disajikan contoh-contoh berikut:

Contoh 4.1.1.

Misalkan $(x_n) = 3 + (-1)^n$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tunjukan bahwa:

a. (x_n) untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terbatas
b. Barisan tersebut tidak konvergen

Bukti.

a. Misalkan $(x_n) = 3 + (-1)^n$, maka sesuai dengan Teorema 2.2.2, diperoleh:

$$\begin{aligned} |3 + (-1)^n| &\leq |3| + |(-1)^n| \\ &= 3 + 1 \\ &= 4 \quad . \end{aligned}$$

Jadi, $|3 + (-1)^n| \leq 4$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika terdapat $M > 0$ sehingga $|x_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jadi (x_n) untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terbatas.

■

b. Misalkan $3 + (-1)^n \to a$, dan $a \in \mathbb{R}$. Ambil sebarang $\varepsilon = 1$. Pilih $K_1 \in \mathbb{N}$ sehingga $|(3 + (-1)^n) - a| < 1$ apabila $n \geq K_1$. Bilangan $n \geq K_1$ dapat berupa bilangan asli genap atau ganjil. Jika n ganjil, maka $|2 - a| < 1$ jika dan hanya jika $1 < a < 3$. Jika n genap, maka $|4 - a| < 1$ jika dan hanya jika $3 < a < 5$. Karena suatu bilangan a tidak mungkin memenuhi kedua pertidaksamaan tersebut, maka ini suatu kontradiksi. Jadi $(x_n) = 3 + (-1)^n$ tidak konvergen.

■

Dari Contoh 4.1.1, terlihat bahwa tidak setiap barisan yang terbatas pasti konvergen. Jadi argumen pada Teorema 2.9.3 tidak berlaku dua arah, artinya bahwa setiap barisan yang konvergen pasti terbatas tetapi tidak berlaku sebaliknya. Dengan kata lain, ada kemungkinan barisan terbatas itu konvergen yaitu barisan monoton.

B. Penentuan Kekonvergenan Barisan dengan Teorema Bolzano-Weierstrass

Sebelum membahas tentang Teorema Bolzano-Weierstrass dan penerapan ke contoh soal, akan dipelajari beberapa teorema yang penting dalam pembuktian Teorema Bolzano-Weierstrass.

Teorema 4.2.1 Setiap barisan bilangan real paling sedikit mempunyai satu barisan bagian yang monoton.

Bukti. Ambil sebarang bilangan real (x_n). Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ diambil

$$x_{n_k} = \text{maks}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$$

atau

$$y_{n_k} = \min(y_1, y_2, y_3, \dots, y_k).$$

Diperoleh $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ barisan naik monoton dan $(y_{n_k}) \subset (y_n)$ barisan turun monoton.

■

Teorema 4.2.2 Jika $X = (x_n) \to x$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka setiap barisan bagian dari X konvergen ke x.

Bukti. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga $|x_n - x| < \varepsilon$ apabila $n \geq K(\varepsilon)$. Ambil sebarang barisan bagian X'. Tulis $X' = \left(x_{r_n}\right)$ untuk setiap $r_n \in \mathbb{N}$. Jelas $r_n \geq n$. Jadi untuk semua $\varepsilon > 0$ ada $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga $|x_n - x| < \varepsilon$ apabila $r_n \geq K(\varepsilon)$. Jadi $X' = (x_{r_n}) \to x$.

■

Teorema 4.2.3 Misalkan barisan $X = (x_n)$ untuk $n \in \mathbb{N}$ terbatas dan $x \in \mathbb{R}$. Jika setiap barisan bagian X konvergen ke x maka barisan X konvergen ke x.

Bukti. Misalkan $X = (x_n)$ terbatas. Pilih $M > 0$ sehingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Andaikan (x_n) tak konvergen ke x. Pilih $\varepsilon_0 > 0$ dan barisan $X' = \left(x_{r_n}\right)$ sehingga $\left|x_{r_n} - x\right| \geq \varepsilon_0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Jadi X' terbatas. Pilih barisan X'' barisan bagian dari X'. Sehingga X'' juga bagian dari X. Jadi $X'' \to x$. Jadi barisan ekor terletak di $V_{\varepsilon_0}(x)$. Ini suatu kontradiksi. Jadi (x_n) konvergen ke x.

■

Teorema 4.2.4. (Teorema Bolzano-Weierstrass) Setiap barisan terbatas mempunyai barisan bagian yang konvergen.

■

Bukti. Misalkan $X = (x_n)$ terbatas, maka himpunan dari suku-suku barisan X, yaitu $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ juga terbatas. Andaikan $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ termuat dalam interval $I_1 = [a, b]$, dan ambil $n_1 = 1$.

i. Bagi I_1 ke dalam 2 sub interval, yaitu I_1' dan I_1'', serta bagi $\{n \in \mathbb{N} | n > 1\}$ menjadi dua bagian yaitu: $A_1 = \{n \in \mathbb{N} | n > n_1, x_n \in I_1'\}$ dan $B_1 = \{n \in \mathbb{N} | n > n_1, x_n \in I_1''\}$.
   Jika A_1 tak hingga berarti B_1 berhingga, maka dipilih $I_2 = I_1''$ dan n_2 merupakan bilangan asli terkecil di B_1.

ii. Bagi I_2 menjadi 2 sub interval, yaitu I_2' dan I_2'', serta bagi $\{n \in \mathbb{N} | n > n_2\}$ menjadi dua bagian, yaitu $A_2 = \{n \in \mathbb{N} | n > n_2, x_n \in I_2'\}$ dan $B_2 = \{n \in \mathbb{N} | n > n_2, x_n \in I_2''\}$.
   Jika A_2 tak hingga, maka pilih $I_3 = I_2'$ dan n_3 merupakan bilangan asli terkecil dalam A_2.
   Jika A_2 hingga berarti B_2 tak hingga, pilih $I_3 = I_2''$ dan n_3 merupakan bilangan asli terkecil di B_2.
   Proses ini dilanjutkan, maka diperoleh selang bersarang: $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_k \supseteq \cdots$ dan sub barisan (x_{n_k}) dari X,$\ni x_{n_k} \in I_k$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.

Karena panjang $I_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$, maka terdapat satu titik persekutuan $\xi \in I_k$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. x_{n_k} dan ξ terletak pada I_k, sehingga diperoleh $\left|x_{n_k} - \xi\right| \leq \frac{(b-a)}{2^{k-1}}$ nilainya cukup kecil, maka bisa ditetapkan: $\frac{(b-a)}{2^{k-1}} = \varepsilon$, yang mengakibatkan $\left|x_{n_k} - \xi\right| \leq \varepsilon$, dan dapat disimpulkan bahwa (x_{n_k}) konvergen ke ξ.

■

Teorema Bolzano-Weierstrass mengatakan bahwa setiap barisan terbatas mempunyai barisan bagian yang konvergen, barisan bagiannya tak perlu konvergen ke titik yang sama. Tetapi jika setiap barisan bagiannya yang konvergen itu konvergen ke titik yang sama, maka barisan aslinya akan konvergen ke titik itu pula. Berikut diberikan contoh-contoh yang membahas lebih jauh mengenai Teorema Bolzano-Weierstrass.

Contoh 4.1.4

Misalkan $(x_n) = (\cos n\pi)$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Periksa apakah barisan tersebut konvergen.

Bukti. Anggota barisan $(x_n) = (\cos n\pi)$ adalah $(-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$, sehingga $|\cos n\pi| = 1$. Jadi, $|\cos n\pi| = 1 \leq 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jadi (x_n) terbatas. Pilih $(x_n)' = (\cos 2n\pi)$. Maka anggota barisan $(x_n)'$ adalah $(1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$. Sehingga $(x_n)' = (\cos 2n\pi) \to 1$. Pilih $(x_n)'' = \cos(2n + 1)\pi$. Maka anggota barisan (x_n)" adalah $(-1, -1, -1, \dots, -1, \dots)$. Sehingga $(x_n) = X'' = \cos(2n+1)\pi \to -1$. Karena $X = \cos n\pi$ mempunyai barisan bagian yang konvergen, maka barisan bagiannya konvergen ke titik yang berbeda. Jadi (x_n) tidak konvergen.

■

Teorema 2.4.5 (Bolzano-Weierstrass Di $\mathbb{R}^n$). Setiap barisan terbatas di $\mathbb{R}^n$ memiliki barisan bagian yang konvergen.

Bukti. Misalkan $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \dots$ adalah barisan tak terhingga yang terbatas di $\mathbb{R}^n$, untuk setiap bilangan bulat j dan untuk setiap bilangan bulat i antara 1 dan n. Misalkan $\left(\boldsymbol{x}_j\right)_i$ memiliki komponen ke-i dari $(\boldsymbol{x}_j)$. Maka: $\boldsymbol{x}_j = \left(\left(\boldsymbol{x}_j\right)_1, \left(\boldsymbol{x}_j\right)_2, \dots, \left(\left(\boldsymbol{x}_j\right)_n\right)\right)$, untuk semua $j \in \mathbb{Z}$. Hal ini sama dengan Teorema Bolzano Weierstrass di $\mathbb{R}$ bahwa ada himpunan bagian yang tak terbatas $J_1 \in \mathbb{N}$ dan $p_1 \in \mathbb{R}$, sehingga $\left(\boldsymbol{x}_j\right)_1 \to p_1$ untuk setiap $j \to \infty \subset J_1$. Misalkan $k \in \mathbb{Z}$ antara 1 dan $n-1$. Misalkan ada himpunan bagian tak terbatas $J_k \subset \mathbb{N}$ dan $(p_1, p_2, \dots, p_k) \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $i \in \mathbb{Z}$ antara 1 dan k, $\left(\boldsymbol{x}_j\right)_i \to p_i$ untuk setiap $j \to \infty$ di J_k. Kemudian mengikuti Teorema Bolzano Weierstrass di $\mathbb{R}$ bahwa ada himpunan bagian yang tak terbatas $j_{k+1} \in J_k$ dan p_{k+1} sehingga $\left(\boldsymbol{x}_j\right)_{k+1} \to p_{k+1}$ untuk setiap $j \to \infty \in J_{k+1}$.

Tambahan persyaratan $J_{k+1} \subset J_k$, kemudian dapat dipastikan bahwa $i \in \mathbb{Z}$ antara 1 dan $k+1$, $\left(\boldsymbol{x}_j\right)_i \to p_i$ untuk setiap $j \to \infty \in J_{k+1}$. Hal ini dilakukan berulang-ulang kemudian dipastikan adanya himpunan bagian tak terbatas J_n.

Misalkan $J_n = \{k_1, k_2, k_3, \dots\}$ dimana $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$. Lalu $\lim_{j\to\infty}(\boldsymbol{x}_{k_j}) = p_i$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Kemudian sesuai Lemma 2.12.2 bahwa $\lim_{j\to\infty}(\boldsymbol{x}_{k_j}) = \boldsymbol{p}$. Terbukti.

■

Contoh 4.1.7

Misalkan $(\boldsymbol{x_n})$ adalah urutan vektor di $\mathbb{R}^3$ yang diberikan oleh $(\boldsymbol{x_n}) = \left((-1)^n, (-1)^{n+1}, \frac{1}{n}\right)$. Buktikan bahwa $(\boldsymbol{x_n})$ terbatas di $\mathbb{R}^3$ dan untuk itu menurut Teorema Bolzano-Weierstrass, cari sub barisan yang konvergen.

Bukti.

1. Akan dibuktikan bahwa $(\boldsymbol{x_n})$ terbatas di $\mathbb{R}^3$. Sebelum membuktikan bahwa vektor (x_n) terbatas di $\mathbb{R}^3$, pertama akan ditunjukan setiap koordinat vektor $(\boldsymbol{x_n})$ terbatas saat n menuju tak hingga. Perlu diingat bahwa suatu himpunan S di $\mathbb{R}^n$ dikatakan terbatas apabila ada $M > 0$ sehingga $||\boldsymbol{v}|| < M$, untuk setiap vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

Misalkan $(\boldsymbol{x_n}) = \left((-1)^n, (-1)^{n+1}, \frac{1}{n}\right)$. Maka

$$||\boldsymbol{x_n}|| = \sqrt{((-1)^n)^2 + ((-1)^{n+1})^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}$$
$$= \sqrt{((-1)^2)^n + ((-1)^2)^{n+\mathbf{1}} + \frac{1}{n^2}}$$
$$= \sqrt{1^n + 1^n + \frac{1}{n^2}}$$
$$= \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{n^2}}$$
$$\leq \sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{\frac{1}{n^2}}$$
$$\leq 1 + 1 + 1$$
$$= 3$$

Karena hal ini berlaku untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $(\boldsymbol{x_n})$ terbatas. ■

2. Mencari sub barisan yang konvergen menggunakan Teorema Bolzano-Weierstrass.
   Misalnya ambil sebarang sub barisan dari (x_n) dengan indeks genap $n_k = 2k$. Sehingga sub barisan $\boldsymbol{x_{n_k}} = \left(1, -1, \frac{1}{2k}\right)$ dalam hal ini, sub barisan $(\boldsymbol{x_{n_k}})$ konvergen ke vektor $(1, -1, 0)$ saat k mendekati tak hingga.

Dengan demikian, karena setiap komponen atau koordinat terbatas, maka vektor $(\boldsymbol{x_n})$ juga terbatas di $\mathbb{R}^3$, dan komponen atau koordinat pertama dan kedua tidak konvergen karena memiliki dua nilai yaitu -1 dan 1 serta Koordinat ketiga konvergen ke 0. Tetapi ketiga koordinat tersebut memiliki sub barisan yang konvergen.
Jadi berdasarkan Teorema Bolzano-Weierstrass di $\mathbb{R}^n$, barisan vektor $(\boldsymbol{x_n})$ terbatas dan memiliki sub barisan yang konvergen.

■

2. Pembuktian Teorema Eksistensi Mak-Min menggunakan Teorema Bolzano-Weierstrass

A. Hubungan antara Fungsi Kontinu dan Kekonvergenan.

Barisan fungsi konvergen terbagi atas dua yaitu konvergen *pointwise* dan konvergen seragam. Meskipun telah diketahui bahwa konvergen *pointwise* adalah syarat perlu konvergen seragam, akan tetapi berdasarkan definisinya mengimplikasikan bahwa barisan fungsi yang konvergen *pointwise* tidak mampu mempertahankan kekontinuan suatu fungsi, dengan kata lain barisan fungsi yang konvergen ke suatu fungsi kontinu. Hal tersebut dapat dilihat dari contoh berikut.

Contoh 4.2.1

Tunjukan kekonvergenan barisan $f_n(x) = \frac{x}{n}$ untuk $x \in [0,1]$.

Bukti. $f_n(x) = \frac{x}{n}$ konvergen seragam menuju $f(x) = 0$ pada $x \in [0,1]$ karena nilai $\left|\frac{x}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$, yang berarti jika diambil sebarang nilai $\varepsilon > 0$ ada nilai $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\left|\frac{x}{n} - 0\right| < \varepsilon$ berlaku untuk semua $x \in [0,1]$. Barisan f_n merupakan barisan fungsi kontinu yang sebagaimana terlihat bahwa f_n konvergen seragam ke $f = 0$. Berdasarkan sifat limit barisan, cukup jelas bahwa f merupakan fungsi kontinu.

■

Jadi, untuk menentukan barisan tersebut konvergen ke fungsi kontinu cukup dengan membuktikan kekontiniuan barisan itu sendiri.

B. Hubungan antara Eksistensi Maks-Min dan Fungsi Kontinu

Kekontinuan suatu fungsi dapat menentukan ada dan tidaknya nilai ekstrim fungsi di suatu selang atau interval.

- Pertama akan dicek kekontiniuan dari suatu fungsi. Suatu fungsi dikatakan kontinu pada $[a, b]$ jika memenuhi ketiga sifat berikut.
  1. $f(x)$ kontinu pada a.
  2. $f(x)$ kontinu pada b.
  3. $f(x)$ kontinu pada (a, b).
- Selanjutnya, untuk mengecek setiap sifat di atas, maka harus menggunakan ketiga sifat berikut:
  1. $f(a)$ ada
  2. $\lim_{x\to a} f(x)$ ada dengan ketentuan $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$
  3. $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

Untuk lebih jelasnya diberikan contoh-contoh sebagai berikut:

Contoh 4.2.2

Misalkan f suatu fungsi dari $[0,1]$ ke $\mathbb{R}$ dengan aturan fungsi:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 4, & x = 0 \end{cases}$$

Berapakah nilai maksimum dan nilai minimum yang dapat diraih oleh f pada interval $[0,1]$.

Penyelesaian.

Dengan menggunakan sifat di atas akan dicek setiap sifat kekontiniuan pada interval $[0,1]$.

1. $f(x)$ tidak kontinu di 0:
   - $f(0)$ ada yaitu 4.
   - $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

   Karena $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ maka $\lim_{x\to 0} f(x)$ tidak ada. Jadi $f(x)$ tidak kontinu di 0 (kontinu kanan).
2. $f(x)$ kontinu di 1, karena:
   a. $f(1)$ ada yaitu 1
   b. $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$, sehingga $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x}$ ada yaitu 1.
   c. $f(1) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$

   Jadi, $f(x)$ kontinu di 1.
3. $f(x)$ kontinu di $(0,1)$. Ambil sebarang $x = 0{,}5 \in (0,1)$, sehingga:
   a. $f(0{,}5)$ ada yaitu $f(0{,}5) = \frac{1}{0{,}5} = 2$
   b. $\lim_{x\to 0{,}5^-} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0{,}5^+} \frac{1}{x} = 2$, sehingga $\lim_{x\to 0{,}5} \frac{1}{x}$ ada yaitu 2
   c. $f(0{,}5) = \lim_{x\to 0{,}5} \frac{1}{x} = 2$.

Karena fungsi di atas adalah fungsi yang bercabang dan tidak memenuhi syarat kekontiniuan maka dapat disimpulkan bahwa f tidak kontinu pada interval $[0,1]$ yaitu f tidak kontinu kanan di 0.

Selanjutnya pandang $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$. f merupakan fungsi yang monoton turun tegas pada $(0,1]$, yaitu $x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$. Dengan kata lain, untuk $x > 0$, semakin besar nilai x semakin kecil nilai $f(x)$.

Untuk $x = 0$, $f(x) = 4$. Jadi, nilai maksimum f di $[0,1]$ adalah 4 dan nilai tersebut dicapai apabila $x = 0$. Tetapi, untuk $x > 0$, apabilai x semakin besar, nilai $f(x)$ semakin kecil menuju 0 (tanpa batas). Jadi, f tidak memiliki nilai minimum pada $[0,1]$.

Berdasarkan Contoh 4.2.2, dapat disimpulkan bahwa diskontiniutas dapat menyebabkan tak terdefinisinya nilai-nilai ekstrim.

C. Pembuktian Teorema Eksistensi Maksimum dan Minimum Menggunakan Teorema Bolzano-Weierstrass

Teorema Eksistensi Maksimum dan Minimum (Teorema 2.16.1) menyatakan bahwa jika diketahui $I = [a, b]$ dan $f: I \to R$ kontinu pada I, maka f mempunyai nilai minimum dan maksimum. Selanjutnya Teorema ini akan dibuktikan menggunakan Teorema Bolzano Weierstrass.

Bukti. Berdasarkan Teorema 2.6.2, dibentuk himpunan $f(I) = \{f(x): x \in I\}$. Karena I terbatas, maka $f(I) \subset \mathbb{R}$ terbatas. Oleh karena itu, ada $y = \sup f(I)$ dan $z = \inf f(I)$.

- Akan ditunjukan ada $x^* \in I$ sehingga $y = \sup f(x^*)$. Karena $y = \sup f(I)$, maka untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$ berlaku $y - \frac{1}{n}$ bukan batas atas dari $f(I)$. Oleh karena itu, ada $x_n \in I$ sehingga

$$y - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq y \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}$$

Karena I terbatas, maka barisan $(x_n) \subset I$ terbatas dan menurut Teorema 4.2.4 ada barisan bagian $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ dengan $x_{n_k} \to x^*$. Jelas bahwa $(x_{n_k}) \subset I$, selanjutnya karena I merupakan suatu interval tertutup dan limit dari setiap (x_n) berada dalam interval tertutup I maka $x^* \in I$. Selanjutnya, karena f kontinu pada x^*, maka barisan $f(x_{n_k}) \to f(x^*)$. Dari Teorema 2.7.6 diperoleh

$$y - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq y \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}$$

Akibatnya, untuk $k \to \infty$ berlaku

$$y < \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) \leq y$$

Artinya, $\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = y$. Jadi,

$$f(x^*) = \lim\left(f(x_{n_k})\right) = y = \sup f(I).$$

Hal ini menunjukan bahwa x^* merupakan nilai maksimum pada I.

- Akan ditunjukan ada $x_* \in I$ sehingga $z = \inf f(x_*)$. Karena $z = \inf f(I)$, maka untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$ berlaku $z + \frac{1}{n}$ bukan batas bawah dari $f(I)$. Oleh karena itu, ada $x_n \in I$ sehingga

$$z + \frac{1}{n} > f(x_n) \geq z \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}$$

Karena I terbatas, maka barisan $(x_n) \subset I$ terbatas dan menurut Teorema 4.2.4 ada barisan bagian $(x_{n_k}) \subset ((x_n)$ dengan $x_{n_k} \to x_*$. Jelas bahwa $(x_{n_k}) \subset I$, selanjutnya karena I merupakan suatu interval tertutup dan limit dari setiap (x_n) berada dalam interval tertutup I maka $x_* \in I$. Selanjutnya, karena f kontinu pada x_*, maka barisan $f(x_{n_k}) \to f(x_*)$. Dari Teorema 2.7.6 diperoleh

$$z + \frac{1}{n_k} > f(x_{n_k}) \geq z \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}$$

Akibatnya, untuk $k \to \infty$ berlaku

$$z > \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \geq z$$

Artinya, $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = z$. Jadi,

$$f(x_*) = \lim\left(f(x_{n_k})\right) = z = \inf f(I).$$

Hal ini menunjukan bahwa x_* merupakan nilai minimum pada I.

■

Contoh 4.2.5

Diberikan suatu fungsi $f(x) = x^2$. Carilah nilai maksimum dan minimum dari fungsi tersebut dalam interval[0,4].

Penyelesaian.

Langkah pertama: mencari nilai fungsi pada batas interval.

- Untuk batas bawah interval: $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0^2 = 0$.
- Untuk batas atas interval: $x = 4 \Rightarrow f(x) = 4^2 = 16$.

Langkah kedua: mencari titik kritis

- Titik kritis adalah titik-titik dimana turunan pertama fungsi sama dengan nol.
- Turunan $f'(x)$ dari fungsi $f(x) = x^2$ adalah $f'(x) = 2x$. Setelah kita atur $f'(x) = 0$, kita dapatkan $x = 0$.

Langkah ketiga: tinjau nilai fungsi pada titik kritis dan ujung interval

- $f(0) = 0$, yang merupakan nilai fungsi pada titik kritis $x = 0$
- $f(4) = 16$, yang merupakan nilai fungsi pada ujung interval $x = 4$

Langkah keempat: bandingkan nilai-nilai tersebut untuk menentukan nilai maksimum dan minimum

- Nilai terbesar adalah 16, yang merupakan nilai fungsi pada ujung interval $x = 4$. Oleh karena itu, nilai maksimum dari fungsi $f(x) = x^2$ pada interval [0,4] adalah 16.
- Nilai terkecil adalah 0, yang merupakan nilai fungsi pada titik kritis $x = 0$. Oleh karena itu, nilai minimum dari fungsi $f(x) = x^2$ pada interval [0,4] adalah 0.

Sehingga, fungsi $f(x) = x^2$ mempunyai nilai maksimum yaitu 16 dan nilai minimum yaitu 0 pada interval [0,4].

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab-bab sebelumnya dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Berdasarkan Teorema 4.2.1, 4.2.2 dan 4.2.3, setiap barisan yang konvergen pasti terbatas, sebaliknya bahwa barisan yang terbatas belum tentu konvergen. Jika barisan monoton dan terbatas maka barisan tersebut konvergen.
2. Teorema Bolzano-Weierstrass, ”Setiap barisan terbatas mempunyai barisan bagian yang konvergen”. Teorema ini dibuktikan dengan 2 cara, cara pertama yakni dibuktikan dengan mengambil barisan bagian yang monoton dan cara kedua dengan interval bersarang. Teorema Bolzano-Weierstrass dapat diartikan bahwa setiap barisan yang terbatas mempunyai barisan bagian yang konvergen ke titik yang tak perlu sama, tetapi jika setiap barisan bagiannya konvergen ke titik yang sama maka barisan aslinya konvergen pula ke titik tersebut.

3. Teorema Bolzano-Weierstrass di $\mathbb{R}^n$, "Setiap barisan terbatas di $\mathbb{R}^n$ memiliki barisan yang konvergen". Teorema ini dibuktikan dengan memisalkan suatu barisan di $\mathbb{R}^n$, setiap sub-sub barisan di $\mathbb{R}^n$ akan konvergen ke setiap titik-titik di barisan tersebut di $\mathbb{R}^n$.
4. Eksistensi maksimum-minimum. Kekontinuan suatu fungsi dapat menentukan ada dan tidaknya nilai ekstrim fungsi itu di suatu selang atau interval. Diskontiniutas bisa menggagalkan adanya nilai-nilai ekstrim.
5. Teorema Eksistensi Maksimum-Minimum dibuktikan dengan Teorema Keterbatasan, Teorema Bolzano-Weierstrass, dan Teorema Apit.

Sesuai dengan judul penelitian terdapat hubungan yaitu untuk membuktikan suatu barisan fungsi memiliki nilai maksimum dan minimum, maka fungsi tersebut harus kontinu, dan suatu fungsi itu kontinu jika dan hanya jika barisan fungsi tersebut konvergen.

B. Saran

Dalam artikel ini, pengujian kekonvergenan dilakukan dengan Teorema Bolzano-Weierstrass serta pengujian Teorema Eksistensi Maksimum-Minimum menggunakan Teorema Bolzano-Weierstrass dan kekontiniuan suatu fungsi. Bagi pembaca yang berminat dapat mengembangkannya dalam menguji kekonvergenan suatu Barisan dan membuktikan Teorema Eksistensi Maksimum-Minimum dengan cara lain. Pembaca juga dapat mengembangkan konsep kekonvergenan dan nilai maksimum dan minimum bukan hanya pada barisan bernilai real saja.

UCAPAN TERIMA KASIH

Dalam penulisan artikel ini, tentunya tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Untuk itu, selayaknya dengan penuh kasih penulis menyampaikan limpah terima kasih kepada Bapak Nugraha K.F Dethan sebagai Pembimbing Utama dan Bapak Grandianus Seda Mada sebagai Pembimbing Pendamping.

REFERENCES

Apostol, T. M. 1974. *Mathematical Analysis Second Edition*. Massacacheusetts USA: Addison-Wiley.

Bartle, R. G and Sherbert, D. R. 2000. *Introduction to Real Analysis Third Edition.* USA: John Wiley and Sons, Inc.

Burns, Dr. Carol JV Fisher. 1993. *The Max-Min Theorem Introduction*. Available at: *https://www.onemathematicalcat.org/CalculusBook/MainBook/3-7MAXM.pdf.*

Dama, K. Mitra. 2003. *Bab 1 Teorema-Teorema Limit Barisan*. Available at: https://www.academia.edu/38116963/BAB_I_TEOREMA_TEOREMA_LIMIT_BARISAN

Faruqi, Novita. 2013. *Sub Barisan dan BW*. Available at: https://www.scribd.com/doc/128773826/Sub-Barisan-Dan-BW

Hernadi. 2011. *Bab 2 Barisan Bilangan Real*. Available at: https://elnicovengeance.files.wordpress.com/2011/06/analisis_bab2.pdf

Profficial. Id. 2021. *Analisi Real: Fungsi Kontinu*. Available at: *https://proofficial.id/analisis-real-fungsi-kontinu/.*

Riyanto, M. Zaki. 2016. *Pengantar Analisis Real 1.* Yogyakarta: Universitas Ahmad Dahlan..

Wilkins, David R. 2018. *Analysis In Several Real Variables School Mathematics: Convergense In Eulidean Spaces*. Available at: *https://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/Courses/MA2321/MA2321-Mich2018-slides/MA2321-Mich2018-MultivariableConvergense-Slides.pdf* .