

Penerapan Teorema Titik Tetap Banach pada Ruang Metrik

Maria Imakulata Fernandes^{1*}, Nugraha K. F. Dethan², Grandianus Seda Mada³

^{1*,2,3}Matematika, Universitas Timor,

maria.imakulata.f@gmail.com, nugradethan@unimor.ac.id, grandianusmada@gmail.com

ABSTRACT

A metric space is a non-empty set X equipped with a function called a metric on X . The application of metric spaces is growing day by day. One of them is by using the Banach Fixed Point Theorem. The Banach Fixed Point Theorem (contraction theorem) is the uniqueness theorem of a fixed point on a mapping called contraction of a metric space into itself. Besides being applied to metric spaces, this theorem can also be used to find solutions of differential equations. This research is conducted to find out the formulation and proof of the Banach Fixed Point Theorem on metric spaces and its application in finding solutions to differential equations. This research is a literature study. This research was conducted through a literature review of books and other literature. From the literature review, then discussed the material in depth. The results of the literature study show that the Banach Fixed Point Theorem plays an important role in determining the solution of differential equations. In determining the solution of differential equations using the Picard method, the fixed point theorem guarantees the singularity of the solution of the given differential equation.

Keywords: *Metric space, Fixed Point, Banach Fixed Point Theorem, Picard Theorem, Differential Equation.*

ABSTRAK

Ruang metrik merupakan suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan sebuah fungsi yang disebut metrik pada X . Penerapan dari ruang metrik semakin hari semakin berkembang. Salah satunya dengan menggunakan Teorema Titik Tetap Banach. Teorema Titik Tetap Banach (teorema kontraksi) merupakan teorema ketunggalan dari suatu titik tetap pada suatu pemetaan yang disebut kontraksi dari ruang metrik kedalam dirinya sendiri. Selain diterapkan pada ruang metrik, teorema ini juga dapat digunakan untuk mencari solusi dari persamaan diferensial. Penelitian ini dilakukan untuk mengetahui perumusan dan pembuktian Teorema Titik Tetap Banach pada ruang metrik dan penerapannya dalam mencari solusi dari persamaan diferensial. Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka. Penelitian ini dilakukan melalui kajian pustaka terhadap buku-buku dan literatur lainnya. Dari kajian pustaka tersebut, kemudian dibahas materi-materinya secara mendalam. Hasil studi pustaka menunjukkan bahwa Teorema Titik Tetap Banach berperan penting dalam penentuan solusi Persamaan Diferensial. Dalam menentukan solusi Persamaan Diferensial dengan menggunakan metode Picard, Teorema titik tetap menjamin ketunggalan solusi dari Persamaan Diferensial yang diberikan.

Kata Kunci: *Ruang Metrik, Titik Tetap, Teorema Titik Tetap Banach, Teorema Picard, Persamaan Diferensial.*

PENDAHULUAN

Matematika merupakan abstraksi dari dunia nyata. Analisis abstrak sendiri merupakan salah satu materi di bidang analisis matematika yang terus mengalami perkembangan dari waktu ke waktu, baik dari segi teori maupun aplikasinya. Salah satu pembahasan di dalam analisis abstrak adalah ruang metrik (*metric space*) (Muhammad, 2010). Ruang metrik merupakan suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan sebuah fungsi yang disebut metrik pada X . Metrik memetakan sebarang anggota himpunan $X \times X$ ke suatu bilangan real tak negatif dan memenuhi beberapa aksioma tertentu. Penerapan dari ruang metrik semakin hari semakin berkembang. Penelitian mengenai ruang metrik pun menjadi hal yang menarik untuk terus dikaji sehingga memunculkan ruang metrik-ruang metrik baru sesuai dengan penerapannya. Di dalam ruang metrik, Dhage telah melakukan beberapa konstruksi dan perluasan terhadap konsep-konsep dasar pada ruang metrik. Demikian pula oleh Sedghi dan Shobe (2007) di dalam ruang metrik. Diantara konsep-konsep tersebut adalah: bola terbuka, himpunan terbuka, himpunan tertutup, barisan konvergen, barisan Cauchy, dan kelengkapan. Perluasan konsep tersebut mendorong penulis mengkonstruksi generalisasi dari salah satu konsep pada ruang metrik, yaitu teorema titik tetap (Muhammad, 2010). Teorema titik tetap adalah sebuah teorema matematika yang menyatakan bahwa setiap fungsi kontinu dari sebuah ruang metrik yang memetakan sebuah titik dalam ruang tersebut ke titik yang sama atau tetap dan memiliki setidaknya satu titik tetap atau *fixed point*. Teorema titik tetap ini juga merupakan salah satu subjek yang menarik untuk dikaji karena memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang. Banyak masalah matematis yang dapat dipecahkan dengan menggunakan prinsip titik tetap. Salah satu contohnya yaitu mencari solusi dari persamaan non-linear. Existensi titik tetap (*fixed point*) untuk suatu fungsi telah banyak dikaji oleh para ahli sebagai salah satu metode menyelesaikan problem matematika (Malahayati, 2016). Teorema Titik Tetap Banach menyediakan teknik untuk memecahkan berbagai masalah yang diterapkan dalam matematika sains (ilmu matematika) dan ilmu teknik. Teorema Titik Tetap Banach (teorema kontraksi) merupakan teorema ketunggalan dari suatu titik tetap pada suatu pemetaan yang disebut kontraksi dari ruang metrik kedalam dirinya sendiri. Teorema Titik Tetap Banach adalah teorema penting dalam analisis fungsional yang memiliki banyak aplikasi dalam penyelesaian persamaan diferensial. Keunggulan utama dari teorema titik tetap Banach dibandingkan dengan metode numerik dan analitik dalam mencari solusi persamaan diferensial yaitu dapat memastikan keberadaan solusi untuk persamaan diferensial, fleksibel karena dapat diterapkan pada berbagai jenis persamaan diferensial termasuk persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial, konvergensi metode iteratif yang sering digunakan dalam metode iteratif untuk mencari solusi persamaan diferensial, kebijakan pengendalian kesalahan karena dapat digunakan untuk mengontrol kesalahan dalam metode numerik (Malahayati & Utami, 2014). Hal tersebut di atas yang melatarbelakangi peneliti untuk melakukan penelitian dengan judul “Penerapan Teorema Titik Tetap Banach Pada Ruang Metrik”, sebagai judul skripsi. Ada dua rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu: Bagaimana perumusan dan pembuktian Teorema Titik Tetap Banach pada Ruang Metrik? Dan bagaimana penerapan Teorema Titik Tetap Banach dalam mencari solusi Persamaan Diferensial? Serta dengan tujuannya yaitu: Mengetahui perumusan dan pembuktian Teorema Titik Tetap Banach pada Ruang Metrik dan mengetahui penerapan Teorema Titik Tetap Banach dalam mencari solusi Persamaan Diferensial. Adapun manfaat dari penelitian ini yaitu: Memberikan informasi tambahan bagi mahasiswa mengenai perumusan dan pembuktian Teorema Titik Tetap Banach pada Ruang Metrik dan penerapan Teorema Titik Tetap Banach dalam mencari solusi Persamaan Diferensial

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yaitu menghimpun beberapa sumber referensi dan dibuat suatu kajian khusus mengenai perumusan dan pembuktian Teorema Titik Tetap Banach pada Ruang Metrik dan penerapan Teorema Titik Tetap Banach dalam mencari solusi

Persamaan Diferensial. Sumber kajian dan penulisan diperoleh dari buku-buku referensi, jurnal-jurnal ilmiah, dan artikel web lainnya. Kajian ini merupakan penelitian yang bersifat murni atau penelitian dasar. Adapun langkah-langkah kajian adalah sebagai berikut: 1) Memaparkan definisi ruang metrik, definisi barisan cauchy, kelengkapan pada ruang metrik serta konsep-konsep matematika lainnya yang menunjang Teorema Titik Tetap Banach pada ruang Metrik. 2) Mendefinisikan dan membuktikan teorema-teorema mengenai ruang metrik berdasarkan definisi dan sifat-sifat utama ruang metrik serta menerapkan Teorema Titik Tetap Banach untuk mencari solusi persamaan diferensial. 3) Memberikan kesimpulan dalam bentuk teorema, lemma atau akibat terbukti atas pengkajian ini. Adapun hasil yang diharapkan dari penelitian ini antara lain: 1) Dapat merumuskan Teorema Titik Tetap Banach pada ruang metrik. 2) Dapat menemukan solusi persamaan diferensial dengan menggunakan Penerapan Titik Tetap Banach.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Titik Tetap (*Fixed Point*)

Definisi 4.1.1 Diketahui (X, d) ruang metrik. Fungsi $F: X \rightarrow X$ dikatakan memenuhi kondisi Lipschits (*Lipschitz condition*) apabila terdapat bilangan real positif α sehingga berlaku $d(F(x_1), F(x_2)) \leq \alpha \cdot d(x_1, x_2)$, untuk setiap $x_1, x_2 \in X$. Fungsi F demikian disebut Lipschitzian dan bilangan real α disebut konstanta Lipschitz.

Definisi 4.1.2 Diketahui (X, d) ruang metrik. Fungsi $F: X \rightarrow X$ disebut fungsi kontraksi (*contraction mapping*) pada X jika terdapat bilangan real α dengan $0 \leq \alpha < 1$ sehingga $d(F(x_1), F(x_2)) \leq \alpha \cdot d(x_1, x_2)$, untuk setiap $x_1, x_2 \in X$.

Dari Definisi 4.1.1 dan Definisi 4.1.2 terlihat bahwa setiap fungsi kontraksi pasti memenuhi kondisi Lipschitz dengan konstanta Lipschitz $0 \leq \alpha < 1$.

Lemma 4.1.1 Diketahui (X, d) ruang metrik. Jika $F: X \rightarrow X$ kontraksi pada X maka F kontinu pada X .

Bukti: Diberikan $\varepsilon > 0$ dan x_1 sebarang titik pada X .

(i) Jika $\alpha = 0$, maka $d(F(x_1), F(x_2)) = 0 < \varepsilon$ untuk setiap $x_2 \in X$.

(ii) Jika $\alpha \neq 0$, diambil $\delta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ dan x_2 sebarang titik di X dengan $d(x_1, x_2) < \delta$ maka $d(F(x_1), F(x_2)) \leq \alpha \cdot d(x_1, x_2) < \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon$.

Jadi F kontinu di x_1 . Karena pengambilan x_1 sebarang, maka terbukti bahwa F kontinu pada X .

Defenisi 4.1.3 Diketahui (X, d) ruang metrik, fungsi $F: X \rightarrow X$ dan $\bar{x} \in X$. Titik $\bar{x} \in X$ disebut sebagai titik tetap dari fungsi F jika berlaku $F(\bar{x}) = \bar{x}$.

Contoh 4.1.1 Diketahui $X = [1, \infty)$ dengan fungsi $T: X \rightarrow X$ didefinisikan $T(x) = \frac{x}{2} + x^{-1}$. Akan ditunjukkan T adalah fungsi kontraksi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &= \left| \frac{x}{2} + x^{-1} - \left(\frac{y}{2} + y^{-1} \right) \right| \\ &= \left| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + x^{-1} - y^{-1} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{2}(x-y) + \left(\frac{y-x}{xy} \right) \right| \\
&= \left| (x-y) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right) \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right| |x-y|
\end{aligned}$$

Karena $X = [1, \infty)$ maka $x \geq 1$ dan $y \geq 1$ untuk itu $\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right| < \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [1, \infty)$, sehingga pilih $\alpha = \frac{1}{2}$ dan untuk itu $d(T(x), T(y)) < \alpha d(x, y)$, maka fungsi T adalah fungsi kontraksi. Akan dicari titik tetap untuk fungsi $T(x) = \frac{x}{2} + x^{-1}$

$$\begin{aligned}
T(p) &= p \\
\Leftrightarrow \frac{p}{2} + \frac{1}{p} &= p \\
\Leftrightarrow \frac{p-2p}{2} + \frac{1}{p} &= 0 \\
\Leftrightarrow -\frac{p}{2} + \frac{1}{p} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{1}{p} &= \frac{2}{p} \\
\Leftrightarrow p^2 - 2 &= 0 \\
\Leftrightarrow p &= \pm\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$p_1 = -\sqrt{2} \text{ dan } p_2 = \sqrt{2}$$

Karena $p_1 = -\sqrt{2} \notin [1, \infty)$ maka $p = \sqrt{2}$

Uji nilai p merupakan titik tetap untuk fungsi $T(x) = \frac{x}{2} + x^{-1}$

$$\begin{aligned}
T(\sqrt{2}) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa p merupakan titik tetap dari fungsi T .

2. Teorema Titik Tetap Banach

Teorema 4.2.1 Diberikan ruang metrik lengkap $X = (X, d)$, dimana $X \neq \emptyset$. Jika fungsi $T: X \rightarrow X$ kontraksi, maka T mempunyai tepat satu titik tetap.

Bukti: Ambil sebarang $x_0 \in X$ untuk mendefinisikan urutan berulang (x_n) sehingga

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_n = T^n x_0, \dots$$

Tunjukkan bahwa (x_n) adalah barisan Cauchy

$$\begin{aligned}
d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\
&\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\
&= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\
&\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\
&\vdots \\
&\leq \alpha^m d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Jika $n > m$, maka dengan ketaksamaan segitiga dan rumus jumlah diperoleh

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \\
&\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \dots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1) \\
&= \alpha^m \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1).
\end{aligned}$$

karena $0 < \alpha < 1$, maka $1 - \alpha^{n-m} < 1$. Sehingga

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) < \varepsilon$$

Terbukti (x_m) barisan Cauchy. Karena X lengkap maka (x_m) konvergen, katakan $x_m \rightarrow x$, akan ditunjukkan bahwa limit x adalah titik tetap dari fungsi T .

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \\ &\leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x) \end{aligned}$$

Dan dapat membuat jumlah dibaris kedua sebarangan kecilnya karena $x_m \rightarrow x$. Disimpulkan bahwa $d(x, Tx) = 0$, sehingga $x = Tx$. Hal ini menunjukkan bahwa x adalah titik tetap dari T . x merupakan satu-satunya titik tetap dari T karena apabila $Tx = x$ dan $T\bar{x} = \bar{x}$

$$d(x, \bar{x}) = d(Tx, T\bar{x}) \leq \alpha d(x, \bar{x})$$

Sehingga diperoleh $d(x, \bar{x}) = 0$ karena $\alpha < 1$. Oleh karena itu $x = \bar{x}$ dan teorema terbukti.

Akibat 4.2.1. Pada Teorema 4.2.1, barisan (x_n) dengan sebarang $x_0 \in X$ konvergen ke titik tetap tunggal $\bar{x} \in X$ dari F . Terkait dengan tingkat atau laju konvergensi dari barisan hampiran titik tetap tersebut, perkiraan kesalahan (*Error Estimate*) adalah perkiraan awal (*Prior Estimate*) yaitu

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \dots \dots \dots (**)$$

dan perkiraan akhir (*Posterior Estimate*) yaitu

$$d(x_m, x) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_{m-1}, x_m) \dots \dots \dots (***)$$

Bukti: Dari bukti Teorema 4.2.1 diperoleh $d(x_m, x) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \dots (n > m)$. Dengan mengambil $n \rightarrow \infty$ diperoleh (**). Selanjutnya, dari (**) dan mengambil $m = 1, y_0 = x_0$ dan $y_1 = x_1$ diperoleh $d(y_1, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(y_0, y_1)$.

Dipilih $y_0 = x_{m-1}$, berakibat $y_1 = F(y_0) = x_m$ dan diperoleh (***). Batas kesalahan awal (*Prior Error Bound*) dapat digunakan pada awal perhitungan jumlah langkah yang diperlukan untuk mencapai akurasi yang diberikan. Sementara batas kesalahan akhir (*Posterior Error Bound*) dapat digunakan pada tahap pertengahan atau pada akhir dari suatu perhitungan. Perhitungan tersebut sekurang-kurangnya akan memiliki akurasi sama dengan (**) atau bahkan lebih baik.

Teorema 4.2.2 Diberikan (X, d) ruang metrik lengkap dan fungsi $F: X \rightarrow X$. Jika fungsi F^m mempunyai sebuah titik tetap tunggal $\bar{x}$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$, maka $\bar{x}$ juga merupakan titik tetap tunggal untuk fungsi F .

Bukti:

- Untuk $m = 1$, jelas.
- Untuk $m > 1$

Karena $\bar{x}$ merupakan titik tetap untuk fungsi $F^{(m)}$ maka $F^{(m)}(\bar{x}) = \bar{x}$. Jadi $F(\bar{x}) = F(F^{(m)}(\bar{x})) = F^{(m)}(F(\bar{x}))$.

Jadi $F(\bar{x})$ adalah sebuah titik tetap untuk $F^{(m)}$ dan karena titik tetap $F^{(m)}$ tunggal maka berakibat $F(\bar{x}) = \bar{x}$. Karena setiap titik tetap untuk F juga merupakan titik tetap untuk $F^{(m)}$ maka $\bar{x}$ merupakan titik tetap tunggal untuk F .

Dari Teorema 4.2.1 dan Teorema 4.2.2 dapat diturunkan akibat.

Akibat 4.2.2 Diberikan (X, d) ruang metrik lengkap dan fungsi $F: X \rightarrow X$. Jika $F^{(m)}$ merupakan suatu fungsi kontraksi untuk suatu $m \in \mathbb{N}$ maka F mempunyai sebuah titik tetap yang tunggal.

Bukti: Diketahui $F^{(m)}$ merupakan suatu fungsi kontraksi untuk suatu $m \in \mathbb{N}$, menurut Teorema 4.2.1 (*Teorema Titik Tetap Banach*) maka $F^{(m)}$ mempunyai titik tetap yang tunggal. Karena $F^{(m)}$

mempunyai titik tetap yang tunggal menurut Teorema 4.2.2 maka F mempunyai sebuah titik tetap yang tunggal.

Teorema 4.2.3 Diberikan (X, d) ruang metrik lengkap dan fungsi $F: X \rightarrow X$. Jika F adalah fungsi kontraksi pada sebuah bola tertutup $Y = \{x \in X | d(x, x_0) \leq r\}$, $r > 0$ dan berlaku $d(x_0, F(x_0)) < (1 - \alpha)r$ maka barisan (x_n) yang didefinisikan dengan $x_{n+1} = F(x_n)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ konvergen ke suatu $\bar{x} \in Y$. Disini $\bar{x}$ merupakan titik tetap tunggal fungsi F pada Y .

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap m, x_m sebagaimana $\bar{x}$ berada di Y . Dari bukti Teorema Titik Tetap Banach diperoleh $d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_0, x_1) < r$. Jadi $x_m \in Y$ untuk setiap m . Karena $(x_m) \rightarrow \bar{x}$ dan Y tertutup diperoleh $\bar{x} \in Y$. Penegasan dari teorema ini merupakan akibat langsung dari bukti teorema titik tetap Banach.

Definisi 4.2.2 Sebuah titik tetap dari suatu pemetaan $T: X \rightarrow X$ dari himpunan X kedalam dirinya sendiri adalah $x \in X$ yang dipetakan kedalam dirinya sendiri, yaitu

$$Tx = x.$$

3. Penerapan Teorema Titik Tetap Banach Pada Persamaan Diferensial

Mempertingkan masalah nilai awal

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, f), \quad x(t_0),$$

dengan $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan fungsi tertentu dan $x(t)$ adalah fungsi yang tidak diketahui dan akan ditentukan. Pada subbagian ini akan menggunakan Teorema Titik Tetap Banach untuk membuktikan masalah nilai awal dari persamaan diferensial dengan menggunakan metode Teorema Picard-Lindelöf.

Definisi 4.3.1 Diberikan D merupakan himpunan terbuka di $\mathbb{R}^2$ dan misalkan $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Katakan bahwa f memenuhi kondisi Lipschitz di y pada D , dengan konstanta Lipschitz M

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M|y_2 - y_1|$$

dengan (x, y_1) dan (x, y_2) berada di D .

Teorema 4.3.1 (Picard-Lindelöf) Misalkan f kontinu pada suatu persegi panjang $R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$, dan dibatasi pada R , katakan $|f(x, t)| \leq c$. Misalkan f memenuhi Lipschitz pada R maka terdapat k konstanta sedemikian sehingga $|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|$ untuk semua $(t, x), (t, y) \in R$. Kemudian masalah nilai awal mempunyai solusi unik yang ada pada suatu interval $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, dengan

$$\beta < \min \left\{ a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k} \right\}.$$

Bukti: Pembuktian dibagi menjadi 5 langkah

Langkah 1: Rumusan ekuivalen sebagai persamaan integral: perhatikan bahwa jika fungsi $x \in C[t_0 - a, t_0 + a]$, sehingga

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

dengan integrasi. Sebaliknya, jika $x \in C[t_0 - a, t_0 + a]$ memenuhi persamaan diatas, maka x adalah solusi yang terus terdiferensiasi. Jadi, masalah nilai awal untuk $x \in C[t_0 - a, t_0 + a]$ setara dengan persamaan diatas untuk $x \in C[t_0 - a, t_0 + a]$.

Langkah 2: Membuat operator T pada ruang lengkap yang dapat diterapkan Teorema Titik Tetap untuk $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ dan $y \in C(J)$, tentukan operator

$$T(y)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in J.$$

Misalkan

$$X = \left\{ y \in C(J) : y(t_0) = x_0, \sup_{t \in J} |x_0 - y(t)| \leq c\beta \right\}.$$

Ini adalah subruang tertutup dari $C(J)$ (diberikan juga metrik d_∞), jadi (X, d_∞) adalah lengkap.

Langkah 3: Perhatikan bahwa $T: X \rightarrow X$ untuk $y \in X$, tunjukkan bahwa $T(y) \in X$. Misalkan $T(y)(t_0) = x_0$. Dengan

$$|x_0 - T(y)(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right| \leq |t - t_0| \cdot \max_{t \in J} |f(t, y(t))| \leq c\beta.$$

Jadi terpenuhi $T(y) \in X$.

Langkah 4: misalkan T adalah kontraksi dan untuk setiap $y_1, y_2 \in X$.

$$\begin{aligned} |T(y_1)(t) - T(y_2)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) ds \right| \\ &\leq |t - t_0| \cdot \max_{s \in J} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| \\ &\leq k\beta d(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Ruas kanan diatas tidak bergantung pada t , jadi ambillah maksimum pada $t \in J$ di kedua sisi, sehingga diperoleh

$$d(T(y_1), T(y_2)) \leq k\beta d(y_1, y_2).$$

Perhatikan bahwa $k\beta < 1$, jadi T kontraksi pada X .

Langkah 5: teorema titik tetap Banach menyatakan bahwa T mempunyai keunikan titik tetap $x \in X$ sedemikian rupa sehingga

$$x(t) = T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Oleh karena itu dari langkah 1 dapat disimpulkan bahwa pada persamaan awal mempunyai solusi unik dan kontinu $x(t)$ pada interval $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$. Selanjutnya, teknik penyelesaian masalah nilai awal dengan melibatkan Teorema Picard disebut dengan Metode Picard.

Contoh 4.3.3 Akan diselesaikan masalah nilai awal

$$f'(x) = 1 + x - f(x), \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad f(0) = 1$$

masalah nilai awal diubah ke persamaan integral.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \int_0^x (1 + t - f(t)) dt \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x f(t) dt, \text{ dengan } f \in C\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Didefinisikan fungsi T dalam $C\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ yang memetakan f menjadi $T(f)$ dengan aturan $T(f(x)) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x f(t) dt$.

Penyelesaian dari persamaan integral ini adalah titik tetap dari T .

Menurut Teorema Titik Tetap Banach, akan dibuktikan bahwa T fungsi kontraksi.

$$\begin{aligned} |T(f(x)) - T(g(x))| &= \left| \int_0^x (f(t)) - (g(t)) dt \right| \\ &\leq \int_0^x |(f(t)) - (g(t))| dt \\ &\leq \int_0^x d(f, g) dt \end{aligned}$$

$$= d(f, g) \int_0^x dt \\ \leq \frac{1}{2} d(f, g)$$

maka

$$d(T(f), T(g)) \leq \frac{1}{2} d(f, g).$$

Jadi T adalah fungsi kontraksi.

Menurut Teorema Eksistensi dan Ketunggalan, terdapat titik tetap f yang tunggal yang merupakan penyelesaian persamaan diferensial tersebut. Lebih lanjut untuk sebarang barisan fungsi (f_n) dan $(f_{n+1}) = T(f_n)$ akan konvergen ke f dalam $C\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Misalkan diambil f_0 fungsi konstan satu yaitu $f_0(x) = 1$, maka

Untuk $n = 1$

$$f_1(x) = T(f_0(x)) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x f(t)dt \\ = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x 1dt \\ = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

Untuk $n = 2$

$$f_2(x) = T(f_1(x)) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x f(t)dt \\ = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2\right)dt \\ = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{6}x^3 \\ = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

Untuk $n = 3$

$$f_3(x) = T(f_2(x)) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x f(t)dt \\ = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3\right)dt \\ = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \\ = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

Secara umum dengan menggunakan induksi matematika akan didapat

$$f_n(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{1}{(n+1)!}(-x)^{n+1}$$

Jelas bahwa barisan terdiri dari jumlah parsial suatu barisan tak hingga. Suku baru yang ditambahkan pada langkah ke- n adalah $\frac{1}{(n+1)!}(-x)^{n+1}$, yang mana pada $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ memiliki norma maksimum $\sup_{|x| \leq \frac{1}{2}} \left| \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = (2^{n+1}(n+1)!)^{-1}$.

Oleh karena itu deret kuasa ini akan konvergen seragam dalam $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Akan didapatkan

$$f(x) = x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x)^k = e^{-x} + x$$

Ini menunjukkan $e^{-x} + x$ merupakan penyelesaian tunggal dari persamaan integral diatas, jelas bahwa $(e^{-x} + x)' = -e^{-x} + 1 = 1 + x - (e^{-x} + x)$ dan $e^0 + 0 = 1$ yang berarti benar bahwa $f(x) = e^{-x} + x$ memenuhi masalah nilai awal tersebut.

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan pada pembahasan bab-bab sebelumnya maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Telah diberikan dan dibuktikan Teorema Titik tetap Banach pada Teorema 4.2.1.
2. Teorema Titik Tetap Banach berperan penting dalam penentuan solusi Persamaan Diferensial. Dalam menentukan solusi Persamaan Diferensial dengan menggunakan metode Picard, Teorema titik tetap menjamin ketunggalan solusi dari Persamaan Diferensial yang diberikan.

B. Saran

Dalam Tugas Akhir, hanya dibahas mengenai definisi ruang metrik, definisi barisan Cauchy dan ruang metrik lengkap, serta pembuktian teorema titik tetap pada ruang metrik dan mencari solusi persamaan diferensial menggunakan Teorema Titik Tetap Banach. Sehingga dapat dilakukan penelitian lebih lanjut dalam menentukan solusi masalah nilai awal dengan fungsi ruang metrik tidak lengkap dengan menggunakan Teorema Picard atau teorema lainnya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Dalam penulisan artikel ini, tentunya tidak terlepas dari dukungan berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung. Untuk itu, selayaknya dengan penuh kasih penulis menyampaikan limpah terima kasih kepada Bapak Nugraha K. F. Dethan sebagai Pembimbing Utama dan Bapak Grandianus Seda Mada sebagai Pembimbing Pendamping.

REFERENCES

- Awrejcewicz, J. 2014. Ordinary Differential Equation and Mechanical Systems. Lods, Poland: Springer.
- Ahsar Karim, A. M., Susanti, S. D., Huda, N. 2010. Teorema Titik Tetap Banach Pada Ruang Metrik-D. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*. Vol.4. No.2. Hal.1-13.
- Bruckner, A. M, Bruckner, J. B, & Thomson, B. S. 1997. Real Analysis. New Jersey: Prentice-Hall.
- Bryant, V. 1985. Metric Spaces, Iteration and Application. University Press: Cambridge.
- Hutchinson, J. E. 1994. Introduction To Mathematical Analysis. Australia: Department of Mathematics.
- Kreyszig, E. 1978. Introductory Functional Analysis with Applications. New York: John Wiley & Sons.
- Kenneth, R. D. 2002. Real Analysis with Real Applications. Kanada: University of Waterloo.

- Kreyszig, E. (1978). Introductory Functional Analysis. In *Operator Theory for Electromagnetics*.
https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3679-3_2
- Malahayati, M. (2016). Analisa Ketunggalan Titik Tetap Pada Pemetaan Kontraktif Di Ruang Metrik Lengkap Dengan Memanfaatkan Jarak-W. *Jurnal Matematika "MANTIK,"* 1(2), 8.
<https://doi.org/10.15642/mantik.2016.1.2.8-16>
- Malahayati, M., & Utami, M. (2014). Teorema Titik Tetap Pada Ruang Quasi Metrik Terasing Tanpa Menggunakan Sifat Kekontinuan Fungsi. *Jurnal Fourier*, 3(1), 31.
<https://doi.org/10.14421/fourier.2014.31.31-47>
- Muhammad. (2010). (TEOREMA TITIK TETAP BANACH PADA RUANG METRIK-D). 4(2), 1–13.
- Proofficial. Id. 2021. *Analisi Real Lanjut: Barisan Cauchy*. Available at: <https://proofficial.id/analisis-real-lanjut-barisan-cauchy/>. Diakses pada 10 Desember 2022.
- Royden, H. L. 1989. *Real Analysis*, New York: Macmillan Publishing Company.
- Rut Dian. 2014. *Metode Euler*. Available at: <https://www.slideshare.net/ruthdian33/metode-euler>. Diakses pada 4 Maret 2023.
- Sihombing, C. S. dan Septiati, E. 2018. *Ruang Metrik dan Ruang Metrik Parsial*, Yogyakarta: Deepublish.