J-MATH
Journal of Mathematics Theory and Applications
Vol. 3, No. 1, Oktober 2024, pp. 27 – 35
ISSN Online: 3025-2628

KLASIFIKASI KELAS KONJUGASI GRUP PERMUTASI PADA n UNSUR (S_n)

Ana Diana Silvana Bimolo[1*], Nugraha K. F. Dethan[2], Fitriani[3]
[1*]Program Studi Matematika, UniversitasTimor,
Email: anabimolo@gmail.com
[2]Program Studi Matematika, UniversitasTimor,
Email: nugrahadethan@unimor.ac.id
[3]Program Studi Pendidikan Matematika, UniversitasTimor,
Email: bhrfitriani@gmail.com

ABSTRACT

Conjugate classes partition the members of a group into mutually exclusive subsets, which can be used to classify the group. For example, conjugate classes can be used to show that two groups are not isomorphic. In this study the author will classify the conjugation class of the permutation group n elements (S_n).
This research uses a literature study method where the author studies the properties, theorems related to conjugation classes and permutation groups. The results obtained from this research are that the conjugation class of a permutation in S_n is determined by its cycle type, namely the partition of n with these conjugation classes, namely conjugation classes containing permutations in S_n that have the same cycle type. The number of conjugation classes is equal to the number of cycle types in n.
Keywords: permutation group, conjugation class.

ABSTRAK

Kelas-kelas konjugasi mempartisi anggota-anggota dalam suatu grup menjadi himpunan-himpunan bagian saling lepas, yang dapat digunakan untuk mengklasifikan grup tersebut. Sebagai contoh, kelas-kelas konjugasi dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa dua grup tidak isomorfik. Pada penelitian ini penulis akan mengklasifikasikan kelas konjugasi grup permutasi n unsur (S_n).
Penelitian ini menggunakan metode studi literatur dimana penulis mempelajari sifat-sifat, teorema yang berkaitan dengan kelas konjugasi dan grup permutasi. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini adalah kelas konjugasi suatu permutasi di S_n ditentukan oleh tipe sikelnya, yaitu partisi dari n dengan kelas-kelas konjugasi tersebut yaitu kelas-kelas konjugasi yang memuat permutasi-permutasi di S_n yang memiliki tipe sikel yang sama. Banyaknya kelas konjugasi sama dengan banyak tipe sikel pada n.
Kata Kunci: grup permutasi, kelas konjugasi.

PENDAHULUAN

Teori grup merupakan salah satu bagian dari aljabar abstrak atau struktur aljabar, karena kajian dari teori grup bukan hanya materi dari suatu himpunan, tetapi struktur dari aksioma, definisi dan teorema-teoremanya (Sukirman, 2016). Grup merupakan salah satu struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong yang dilengkapi operasi biner yang bersifat asosiatif, memiliki elemen identitas dan setiap elemennya memiliki invers. Apabila operasi biner pada suatu grup berlaku sifat komutatif, maka grup tersebut disebut Grup Abelian atau Grup Komutatif.

Pada awal dan pertengahan abad ke-19, grup permutasi adalah satu-satunya grup yang diselidiki oleh para ahli matematika. Hingga sekitar tahun 1850 gagasan tentang kelompok abstrak diperkenalkan oleh Cayley, dan perlu waktu seperempat abad sebelum gagasan tersebut benar-benar diterapkan (Gallian, 2010). Grup permutasi G adalah suatu grup dengan unsur-unsurnya adalah permutasi dari suatu himpunan M dan operasi grupnya adalah komposisi dari permutasi atau dengan kata lain fungsi bijektif dari M ke M dan membentuk suatu grup. Grup permutasi tersebut dinotasikan sebagai $Sym(M)$ (notasi

Sym di sini bermakna *Symmetric*). Khusus untuk himpunan $M = \{1,2,\ldots,n\}$, grup permutasi tersebut umumnya dinotasikan sebagai S_n.

Dalam teori grup, elemen b dalam G dikatakan konjugasi dengan $a \in G$ (atau sekedar konjugat dari a) jika terdapat $x \in G$ sedemikian sehingga $b = x^{-1}ax$ (Herstein, 1987). Ini adalah relasi ekuivalen yang kelas ekuivalen disebut kelas konjugasi. Kelas-kelas konjugasi mempartisi anggota-anggota dalam suatu grup menjadi himpunan-himpunan bagian saling lepas, yang dapat digunakan untuk mengklasifikan grup tersebut. Sebagai contoh, kelas-kelas konjugasi dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa dua grup tidak isomorfik. Secara umum, ukuran dari kelas-kelas konjugasi dalam suatu grup mengandung informasi terkait struktur dari grup tersebut (Dethan & Luan, 2022).

Pada tulisan ini penulis akan membahas tentang pengklasifikasian kelas konjugasi grup permutasi pada n unsur (S_n).

METODE

Metode yang diterapkan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka atau studi literatur. Studi literatur adalah serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat, serta mengelolah bahan penelitian. Objek yang diteliti adalah grup permutasi pada n unsur (S_n). Penulis akan menjelaskan tentang grup permutasi, kelas konjugasi lalu akan melakukan pengklasifikasian kelas-kelas konjugasi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Grup, Grup Permutasi dan Kelas Konjugasi

Sebelum melakukan pengklasifikasian kelas-kelas konjugasi grup permutasi pada n unsur (S_n).

Definisi 1.1 (Suryanti, 2017)**.** Misalkan G suatu himpunan tak kosong, maka G bersama-sama operasi $*$ adalah Grup, di tulis $(G,*)$ jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(G1) Operasi $*$ merupakan operasi biner di G, maka untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $a * b = ab \in G$. Sehingga dapat dikatakan G bersifat tertutup dibawah operasi $*$

(G2) Operasi $*$ bersifat asosiatif, untuk setiap $a, b, c \in G$, berlaku $(ab)c = a(bc)$

(G3) Mempunyai elemen identitas, maka ada terdapat $e \in G$, sedemikian hingga untuk setiap $a \in G$, berlaku $ae = ea = a$

(G4) Setiap elemen G mempunyai invers, maka untuk setiap $a \in G$, ada terdapat $a^{-1} \in G$, sedemikian hingga $aa^{-1} = a^{-1}a = e$, a^{-1} adalah invers dari elemen a.

Definisi 1.2 (Dummit & Foote, 2004)**.** Jika $(G,*)$ suatu grup memenuhi sifat komutatif yaitu untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $ab = ba$, maka $(G,*)$ disebut grup komutatif atau grup abelian.

Contoh 1.3. Pada **Contoh 1** $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup. $(\mathbb{Z}, +)$ juga merupakan grup abelian. *Bukti:* untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + b = b + a$.

Definisi 1.4 (Suryanti, 2017)**.** Order grup G adalah banyaknya elemen dari suatu grup G. Jika order suatu grup adalah berhingga maka grup tersebut disebut grup berhingga. Sebaliknya jika order suatu grup tak hingga maka grup terebut disebut grup tak hingga.

Definisi 1.5 (Suryanti, 2017)**.** Misalkan G suatu grup, dan $g \epsilon G$. Order dari g dinotasikan dengan $|g|$ yang menyatakan bilangan bulat positif terkecil n sehingga memenuhi $g^n = e$, dengan e adalah elemen netral. Bila tidak ada n yang demikian maka $|g| = +\infty$.

Definisi 1.6 (Rotman, 1994)**.** Misalkan G grup dan $H \subseteq G, H$ dikatakn subgrup dari G dituliskan $H < G$, jika $H \neq \emptyset$, H sendiri merupakan grup dengan operasi biner yang sama dengan G.

Definisi 1.7 (*Higher Algebra Lectures Notes*, n.d.)**.** Misalkan S adalah sebuah himpunan. Sebuah fungsi bijektif $\sigma: S \to S$ disebut sebuah permutasi di S. Perm(S) melambangkan himpunan semua permutasi dalam S.

Contoh 1.8. Misalkan $X = \mathbb{R}$, dengan $X = \{1,2,3\}$, maka $\alpha: X \to X$ yang didefinisikan dengan $\alpha(1) = 3$, $\alpha(2) = 2, \alpha(3) = 1$ merupakam permutasi dari X.

Definisi 1.9 (Suryanti, 2017)**.** Misalkan $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dan S_n adalah himpunan dari semua fungsi bijektif $f: S \to S$. Maka S_n adalah operasi komposisi fungsi merupakan suatu grup, grup ini dinamakan grup permutasi. Selanjutnya misalkan: $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n$ dimana $a_j \in S$, dengan $j = 1, 2, \dots, n$. Hal ini dinotasikan oleh $f = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$, bila $f, g, h \in S_n$ maka komposisi dari f dan g ditulis $f \circ g$ juga di S_n. Elemen identitas di S_n adalah $e = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$. Jika $f \in S_n$, maka $f^{-1} \in S_n$ yang diberikan oleh $f^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$. Grup permutasi S_n memiliki elemen sebanyak $n!$ atau $|S_n| = n!$

Contoh 1.10. Misalkan $S = \{1, 2, 3\}$ maka $|S_3| = 3! = 6$. Elemen-elemen S_3 diantaranya adalah sebagai berikut:

$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

S_3 dengan operasi komposisi merupakan grup tak komutatif.

Definisi 1.11 (Herstein, 1987). Misalkan $i_1, i_2, \dots, i_k$ dengan k bilangan bulat berbeda di $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Simbol $i_1, i_2, \dots, i_k$ akan merepresentasikan permutasi $\sigma \in S_n$, dimana $\sigma(i_1) = i_2$, $\sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_j) = i_{j+1}$ untuk $j < k$, $\sigma(i_k) = i_1$, dan $\sigma(s) = s$ untuk setiap $s \in S$ jika s berbeda dari $i_1, i_2, \dots, i_k$.

Contoh 1.12. Misalkan di S_7, permutasi (1 3 5 4) adalah permutasi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$. Permutasi dari bentuk $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ adalah sebuah k-sikel atau sikel dengan panjang *k.*

Dua sikel, misalkan sebuah k-sikel dan m-sikel, dikatakan saling lepas jika mereka tidak mempunyai bilangan bulat yang sama. Contohnya (1 3 5) dan (4 2 6 7) di S_7 adalah sikel saling lepas.

Definisi 1.13 (Suryanti, 2017)**.** Suatu sikel yang panjangnya 2 dinamakan transposisi. Sikel dapat ditulis sebagai hasil kali dari transposisi. Perhatikan sikel berikut:

$$(a_1 a_2 a_3 \ \dots a_n) = (a_1 a_3)(a_1 a_2) \dots (a_1 a_n)$$

Contoh 1.14. (1 6)(2 5 3) merupakan hasil kasi dari (16)(25)(23). Selanjutnya sikel (2 3 4 6 8) dapat ditulis sebagai hasil kali transposisi berikut: (2 8)(2 6)(2 4)(2 3). Hasil kali transposisi ini tidak tunggal, penulisan hasil kali transposisi yang lain adalah (2 3)(3 4)(4 6)(6 8). Begitu juga dengan permutasi (1 6)(2 5 3) perkalian transposisinya tidaklah tunggal. Dari contoh ini, dapatlah ditarik kesimpulan bahwa tidak ada cara mereprestasikan permutasi sebagai hasil kali transposisi tunggal. Sebagai contoh penulisan permutasi identitas sebagai hasil kali transposisi dapat ditulis sebagai berikut: (12)(12) atau (14)(23)(14)(23).

Sifat-Sifat Permutasi disajikan dalam Teorema 1.15, Teorema 1.16 dan Teorema 1.18.

Teorema 1.15 (*Disjoint Cycles*). Setiap permutasi dari suatu himpunan berhingga dapat ditulis sebagai suatu putaran (*cycle*) atau sebagai suatu hasil (*product*) dari putaran yang saling lepas.

Teorema 1.16 (*Disjoint Cycles Commute*). Jika sepasang putaran $\alpha = (a_1\ a_2 \ldots\ a_m)$ dan $\beta = (b_1\ b_2 \ldots\ b_n)$ tidak mempunyai elemen-elemen (*entry*) yang sama, maka $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Teorema 1.17 (Orde dari Permutasi). Orde suatu permutasi dari suatu himpunan berhingga, yang ditulis dalam bentuk putaran saling lepas, adalah kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari panjang putaran.

Definisi 1.18. Grup dari semua permutasi dari himpunan unsur grup simetris berderajat n dinyatakan dengan $(S_n,\circ)$.

Definisi 1.19. Grup permutasi Perm(S) disebut grup simetri pada n unsur dan di notasikan dengan S_n.

Lemma 1.20 (Rotman, 1994)**.** Jika G adalah sebuah grup, lalu ada relasi "y adalah sebuah konjugat dari x dalam G", maka, $y = gxg^{-1}$ untuk $g \in G$ adalah sebuah relasi ekivalensi

Definisi 1.21 (Rotman, 1994)**.** Suatu hubungan persamaan di suatu grup G, adalah persamaan kelas pada partisi G. Persamaan kelas yang memiliki hubungan di sebut dengan kelas konjugasi dari G. Jadi, kelas konjugasi dari $g \in G$ adalah $C[g] = \{g = xgx^{-1} | x \in g\}$. Kelas konjugasi $C[a], C[b]$ sama jika dan hanya jika a dan b konjugat yaitu $gag^{-1} = b,\ g \in G$, dan sebaliknya. Dan untuk beberapa $x \in G$. Hubungan yang simetri, pada saat $g = yhy^{-1}$ dimana $y = x$. Ketika $xgx^{-1} = h$ dapat dikatakan bahwa x membuat g konjugat pada h.

Contoh 1.22. Terdapat tiga kelas konjugasi pada grup simetri S_3. Terdapat enam elemen dalam S_3 yaitu $\{e, a, b, c, d, f\}$ dan membentuk kelas konjugasi yaitu: $\{e\}, \{b, c\}, \{a, b, f\}$.

Contoh 1.23. (Conrad, n.d.)**.** Kelas-kelas konjugasi dari grup dihedral D_{2n} terbagi menjadi dua, yakni untuk n ganjil dan n genap. Dkelas-kelas konjugasi untuk n ganjil adalah

- $\{1\}$, dimana $1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
- $\{\sigma^i, \sigma^{-i}\}$ untuk $i = 1,2, \ldots, (n-1)/2$, dan
- $\{\tau, \sigma\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}$.

  Sedangkan kelas-kelas konjugasi dari D_{2n} untuk n genap adalah
- Dua kelas konjugasi yang memiliki satu anggota: $\{1\}$ dan $\{\sigma^{n/2}\}$,
- $\{\sigma^i, \sigma^{-i}\}$ untuk $i = 1,2, \ldots, \frac{n}{2} - 1$,
- $\{\tau, \sigma^2\tau, \sigma^4\tau, \ldots, \sigma^{n-2}\tau\}$, dan
- $\{\sigma\tau, \sigma^3\tau, \sigma^5\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}$.

2. Klasifikasi kelas konjugasi grup permutasi pada n unsur (S_n)

Untuk memperoleh hasil dari rumusan masalah, penulis menuliskan beberapa lemma, teorema, akibat, dan contoh untuk memperoleh hasil akhir. Berikut akan dijelaskan

Lemma 2.1. Misalkan G adalah grup dan $x, g \in G$, maka $(xgx^{-1})^n = xg^n x^{-1}$ untuk semua bilangan bulat positif n.

Bukti. (menggunakan induksi matematika)

1. Misalkan untuk $n = 1$, maka $(xgx^{-1})^1 = xg^1x^{-1} \Leftrightarrow x^1gx^{-1} = xgx^{-1} \Leftrightarrow xgx^{-1} = xgx^{-1}$, benar.
2. Selanjutnya, asumsikan benar untuk $n = k$, yaitu $(xgx^{-1})^k = xg^kx^{-1}$. Maka akan dibuktikan bahwa berlaku untuk $n = k + 1$, yaitu $(xgx^{-1})^{k+1} = xg^{k+1}x^{-1}$. Sehingga $(xgx^{-1})^{k+1} = (xgx^{-1})^k \cdot (xgx^{-1}) = \left(xg^kx^{-1}\right) \cdot (xgx^{-1}) = xg^kx^{-1}xgx^{-1} = xg^k(x^{-1}x)gx^{-1} = xg^kgx^{-1} = xg^{k+1}x^{-1}$. ■

Selanjutnya Lemma 2.1 akan digunakan untuk membuktikan Teorema 2.2.

Teorema 2.2. Semua elemen dari sebuah kelas konjugasi mempunyai orde yang sama.

Bukti. Ini menyatakan bahwa g dan xgx^{-1} mempunyai orde yang sama. Dari Lemma 4.1. $(xgx^{-1})^n = xg^nx^{-1}$ untuk semua $n \in \mathbb{Z}^+$. Jadi jika $g^n = e$ maka $(xgx^{-1})^n = xg^nx^{-1} = x^{-1}xg^nx^{-1}x = g^n = e$, dan jika $(xgx^{-1})^n = e$ maka $xg^nx^{-1} = e$, jadi $g^n = x^{-1}x = e$. Maka $(xgx^{-1})^n = e$ jika dan hanya jika $g^n = e$. Jadi g dan xgx^{-1}mempunyai orde yang sama. ■

Dari Teorema 2.2 diperoleh Akibat 2.3

Akibat 2.3. Jika H adalah sebuah subgrup siklik dari G maka setiap subgrup yang terkonjugasi dengan H adalah siklik.

Bukti. Dapat ditulis $H = \langle y \rangle = \{y^n : n \in \mathbb{Z}\}$, maka $gHg^{-1} = \{gy^ng^{-1} : n \in \mathbb{Z}\} = \langle gyg^{-1} \rangle$, jadi gHg^{-1} adalah siklik dengan sebuah generator merupakan konjugat (oleh g) adalah generator dari H. ■

Selanjutnya akan di periksa bahwa kelas konjugasi yang berbeda itu saling lepas.

Teorema 2.4. Misalkan G adalah sebuah grup dengan $g, h \in G$. Jika kelas konjugasi dari g dan h saling berkaitan maka kelas konjugasi mereka sama.

Bukti. Akan ditunjukan setiap elemen yang konjugat dengan g juga konjugat dengan h, dan sebaliknya. Saat kelas konjugasi saling berkaitan, maka $xgx^{-1} = yhy^{-1}$ untuk x dan y dalam grup. Sehingga $g = x^{-1}yhy^{-1}x = (x^{-1}y)h(x^{-1}y)^{-1}$. Jadi g konjugat dengan h. Setiap elemen yang konjugat dengan g adalah zgz^{-1} untuk beberapa $z \in G$, dan $zgz^{-1} = z(x^{-1}y)h(x^{-1}y)^{-1}z^{-1} = (zx^{-1}y)h(zx^{-1}y)^{-1}$, ini menunjukan setiap elemen dari G yang konjugat dengan g juga konjugat dengan h dan sebaliknya. ■

Teorema 2.4 mengatakan setiap elemen suatu grup hanya dimiliki oleh satu kelas konjugasi. Atau dapat dikatakan bahwa elemen kelas konjugasi sebagai perwakilan kelas tersebut. Misalkan kelas

konjugasi terdiri dari semua xgx^{-1} untuk g tetap dan x bervariasi. Sebaliknya sama dengan xgx^{-1} untuk x tetap dan g bervariasi. Artinya, selain melihat semua elemen yang terkonjugasi ke g, dapat dilihat semua cara x dapat mengkonjugasikan elemen-elemen dalam grup.
Selanjutnya langkah pertama untuk mendeskripsikan kelas konjugasi di S_n, akan dicari konjugasi pada sebuah k-sikel (sikel dengan panjang k).

Teorema 2.5. Untuk setiap sikel $(i_1 i_2 \dots i_k)$ dalam S_n dan setiap $\sigma \in S_n$,

$$\sigma(i_1 i_2 \dots i_k)\sigma^{-1} = \big(\sigma(i_1)\sigma(i_2) \dots \sigma(i_k)\big).$$

Sebelum membuktikan Teorema 2.5, perlu diperhatikan Contoh 2.6 dan Contoh 2.7 yang menjelaskan bagaimana Teorema 3.28 bekerja.

Contoh 2.6. Di S_5, misalkan $\sigma = (13)(254)$. Maka $\sigma(1432)\sigma^{-1} = (13)\,(254)\,(1432)\,(245)\,(13) = (1532)$. Saat $(\sigma(1)\sigma(4)\sigma(3)\sigma(2)) = (3215)$ karena $\sigma(1) = 3$, $\sigma(4) = 2$, $\sigma(3) = 1$, dan $\sigma(2) = 5$. Jelas $(1532) = (3215)$.

Contoh 2.7. Di S_7, misalkan $\sigma = (13)(265)$. Maka $\sigma(73521)\sigma^{-1} = (13)\,(265)\,(73521)\,(256)\,(13) = (12637)$. Dan $\big(\sigma(7)\sigma(3)\sigma(5)\sigma(2)\sigma(1)\big) = (71263) = (12637)$.

Bukti teorema 2.5. Misalkan $\pi = \sigma(i_1 i_2 \dots i_k)\sigma^{-1}$. Akan ditunjukan bahwa π adalah permutasi siklik dari $\sigma(i_1)\sigma(i_2) \dots \sigma(i_k)$. Maka akan ditunjukan dua hal yaitu:

- Tunjukan π mengirimkan $\sigma(i_1)$ ke $\sigma(i_2)$, $\sigma(i_2)$ ke $\sigma(i_3)$,...., dan terakhir $\sigma(i_k)$ ke $\sigma(i_1)$.
- Tunjukan π tidak berpindah selain $\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k)$

Langkah kedua penting. Hanya dengan mengetahui permutasi siklik mempermutasikan bilangan-bilangan tersebut tidak berarti sikel dibangun dari bilangan-bilangan tersebut, karena dapat berpindah dengan bilangan lain, yang belum dilihat. Untuk contoh, jika $\pi(1) = 2$ dan $\pi(2) = 1$, π bias jadi bukan (12), karena $(12)(345)$ juga memiliki perilaku yang sama.
Sehingga $\pi\big(\sigma(i_1)\big) = (\sigma(i_1 i_2 \dots i_k)\sigma^{-1})\sigma(i_1) = ((\sigma(i_1 i_2 \dots i_k)\sigma^{-1}\sigma)(i_1) = \sigma(i_1 i_2 \dots i_k)(i_1) = \sigma(i_2)$. ($i_1$ diakhir bukan merupakan sikel dengan panjang 1, tetapi melambangkan permutasi yang sedang dievaluasi). Demikian pula dengan $\pi\big(\sigma(i_2)\big) = \sigma(i_1 i_2 \dots i_k)(i_2) = \sigma(i_3)$, hingga $\pi\big(\sigma(i_k)\big) = \sigma(i_1 i_2 \dots i_k)(i_k) = \sigma(i_1)$.
Selanjutnya akan ditunjukan $\pi(a) = a$. Ini berarti akan ditunjukan $(\sigma(i_1 i_2 \dots i_k)\sigma^{-1})\sigma(a) = a$, saat $a \neq \sigma(i_j)$ untuk $j = 1, \dots, k$, juga $\sigma^{-1}(a)$ bukan i_j untuk $j = 1, \dots, k$. Sehingga sikel $(i_1 i_2 \dots i_k)$ tidak memindahkan $\sigma^{-1}(a)$. Jadi $\sigma^{-1}(a)$ tetap menjadi $\sigma^{-1}(a)$. Oleh karena itu, $\pi(a) = (\sigma(i_1 i_2 \dots i_k)\sigma^{-1})(a) = (\sigma(i_1 i_2 \dots i_k)(\sigma^{-1}(a)) = \sigma(\sigma^{-1}(a)) = a.$■

Telah diketahui bahwa setiap konjugasi dari sebuah sikel dengan sikel memiliki panjang yang sama, maka selanjutnya akan dibuktikan apakah dua sikel yang memiliki panjang sama berkonjugasi? Akan diperlihakan pada Teorema 2.8.

Teorema 2.8. Semua sikel yang memiliki panjang yang sama dalam S_n berkonjugasi.

Bukti. Pilih dua sikel dengan panjang k, misalkan $(a_1\, a_2 \dots a_k)$ dan $(b_1\, b_2 \dots b_k)$. Dan pilih $\sigma \in S_n$, sehingga $\sigma(a_1) = b_1, \dots, \sigma(a_k) = b_k$, dan misalkan σ adalah sebuah sembarang bijeksi dari komplemen $\{a_1, \dots, a_k\}$ ke komplemen $\{b_1, \dots, b_k\}$. Maka sesuai Teorema 4.5. $\sigma(a_1 a_2 \dots a_k)\sigma^{-1} = \big(\sigma(a_1)\sigma(a_2) \dots \sigma(a_k)\big) = (b_1\, b_2 \dots b_k)$, ini jelas berarti sikel $(a_1\, a_2 \dots a_k)$ berkonjugasi dengan

$(b_1\ b_2 \dots b_k)$. Sehingga $\sigma(a_1 a_2 \dots a_k)\sigma^{-1}$ mengirimkan $\sigma(a_1)$ ke $\sigma(a_2)$, hingga $\sigma(a_k)$ ke $\sigma(a_1)$, atau $\sigma(a_1 a_2 \dots a_k)\sigma^{-1}$ mengirimkan b_1 ke b_2, hingga b_k ke b_1. Dapat dilihat konjugasi oleh σ membawa sikel dengan panjang k pertama ke kedua. ■

Contoh 2.9. Berikut merupakan tabel dari semua $\sigma(12)\sigma^{-1}$untuk $\sigma \in S_3$.

σ	(1)	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
$\sigma(12)\sigma^{-1}$	(12)	(12)	(23)	(13)	(23)	(13)

Tabel 3.1. Semua $\boldsymbol{\sigma(12)\sigma^{-1}}$untuk $\boldsymbol{\sigma \in S_3}$.

Konjugasi dari (12) terdapat pada kolom kedua: $(12), (13)$, dan (23). Jadi semua transposisi di S_3 berkonjugasi.

Tulis sebuah permutasi menjadi sebuah hasil dari sikel yang saling lepas, atur panjang dari sikel itu dalam orde yang meningkat, termasuk sikel dengan panjang . panjang ini dinamakan tipe sikel dari sebuah permutasi. Contohnya di S_7 permutasi $(12)(34)(567)$ memiliki tipe sikel $(2, 2, 3)$. Ketika sikel dengan panjang 1 juga termasuk maka contohnya $(12)(35)$ di S_5 adalah $(4)(12)(35)$ dan memiliki tipe sikel $(1, 2, 2)$. Di S_6 $(4)(6)(12)(35)$ dan mempunyai tipe sikel $(1, 1, 2, 2)$.
Tipe sikel dari sebuah permutasi di S_n adalah himpunan bilangan bulat positif yang berjumlah n, atau banyaknya tipe sikel sama dengan banyaknya partisi dari n (Conrad, n.d.). Misalkan terdapat 7 partisi dari 5 yaitu $5, 1 + 4, 2 + 3, 1 + 2 + 2, 1 + 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Sehingga permutasi dari S_5 mempunyai 7 tipe sikel. Dengan mengetahui tipe sikel dari sebuah permutasi maka memberikan informasi tentang struktur dari sikel saling lepas kecuali bagaimana angka-angka itu dimasukan dalam sikel. Contohnya, sebuah permutasi di S_5 dengan tipe sikel $(1, 2, 2)$ bias merupakan sikel $(1)(23)(45), (2)(35)(14)$, dan seterusnya. Sehingga dua permutasi dalam S_n berkonjugasi dengan tepat ketika mempunyai tipe sikel yang sama. Untuk lebih jelasnya akan dibahas pada Contoh 2.10 dan Lemma 2.11.

Contoh 2.10. Akan dipertimbangkan dua permutasi dalam S_5 dengan tipe sikel (2,3): misalkan $\pi_1 = (24)(153)$, $\pi_2 = (13)(425)$. Untuk mengkonjugasikan π_1 ke π_2, maka misalkan σ adalah permutasi pada S_5 yang mengirimkan semua π_1 ke π_2 dengan tepat memiliki orde yang sama: $\sigma = \binom{24153}{13425} = (14352)$. Maka $\sigma\pi_1\sigma^{-1} = \sigma(24)(153)\sigma^{-1} = \sigma(24)\sigma^{-1}\sigma(153)\sigma^{-1} = \big(\sigma(2)\sigma(4)\big)\big(\sigma(1)\sigma(5)\sigma(3)\big) = (13)(425)$, jadi $\sigma\pi_1\sigma^{-1} = \pi_2$.
Misalkan π_1 dan π_2 yang lain, katakan $\pi_1 = (42)(531)$, $\pi_2 = (13)(542)$, maka $\pi_2 = \sigma\pi_1\sigma^{-1}$ dimana $\sigma = \binom{42531}{13542} = (1234)$.

Lemma 2.11. Jika π_1 dan π_2 adalah permutasi yang saling lepas di S_n. maka $\sigma\pi_1\sigma^{-1}$ dan $\sigma\pi_2\sigma^{-1}$ adalah permutasi yang saling lepas untuk semua $\sigma \in S_n$.

Bukti. Saling lepas jika tidak ada elemen yang berada dalam π_1 dan π_2 secara bersamaan. Yang artinya, tidak ada i sedemikian sehingga $\pi_1(i) \neq i$ dan $\pi_2(i) \neq i$ atau untuk setiap i, berlaku $\pi_1(i) \neq \pi_2(i)$. Pertama, akan diperiksa $\sigma\pi_1\sigma^{-1}$. Misalkan $a = \sigma(i)$, dengan demikian $(\sigma\pi_1\ \sigma^{-1})(a) = \sigma(\pi_1(\sigma^{-1}(a)))$. Jika $\pi_1(i) = j$, maka dapat dituliskan sebagai $\sigma(j)$. Artinya, untuk setiap i, $\sigma\pi_1\sigma^{-1}$ memiliki gambaran yang berbeda, oleh karena itu $\sigma\pi_1\sigma^{-1}$ adalah permutasi. Demikian pula dengan $\sigma\pi_2\sigma^{-1}$ adalah permutasi untuk setiap $\sigma \in S_n$. selanjutnya akan ditunjukan $\sigma\pi_1\sigma^{-1}$

dan $\sigma\pi_2\sigma^{-1}$ saling lepas. Misalkan a dan b adalah dua elemen yang berbeda. Akan ditunjukan $(\sigma\pi_1\sigma^{-1})(a) \neq (\sigma\pi_2\sigma^{-1})(b)$. Sehingga menggunkana definisi permutasi, diperoleh $(\sigma\pi_1\sigma^{-1})(a) = \sigma(\pi_1(\sigma^{-1}(a)))$, dan $(\sigma\pi_2\sigma^{-1})(b) = \sigma(\pi_2(\sigma^{-1}(b)))$. Karena π_1 dan π_2 saling lepas, maka $\pi_1(\sigma^{-1}(a)) \neq \pi_2(\sigma^{-1}(b))$, sehingga $\sigma(\pi_1(\sigma^{-1}(a))) \neq \sigma(\pi_2(\sigma^{-1}(b)))$. Dengan kata lain $\sigma\pi_1\sigma^{-1}$ dan $\sigma\pi_2\sigma^{-1}$ juga saling lepas. ■

Teorema 2.12. Dua permutasi di S_n berkonjugasi jika dan hanya jika mereka mempunyai tipe sikel yang sama.

Bukti. Pilih $\pi \in S_n$, tulis π sebagai sebuah produk dari sikel saling lepas. Menurut teorema dan lemma sebelumnya maka $\sigma\pi\sigma^{-1}$ akan menjadi produk dari konjugasi σ yang merupakan sikel saling lepas untuk π, dan konjugasi σ ini adalah sikel saling lepas dengan panjang masing-masing sama. Oleh karena itu $\sigma\pi\sigma^{-1}$ mempunyai tipe sikel yang sama dengan π.
Untuk arah sebaliknya akan dijelaskan mengapa permutasi-permutasi π_1 dan π_2 dengan tipe sikel yang sama adalah konjugasi. Misalkan tipe sikel adalah $(m_1, m_2, \ldots)$. Maka misalkan $\pi_1 = \underbrace{(a_1a_2 \ldots a_{m_1})}_{m_1}\underbrace{(a_{m_1+1}a_{m_1+2} \ldots a_{m_1+m_2})}_{m_2}\ldots$ dan $\pi_2 = \underbrace{(b_1b_2 \ldots b_{m_1})}_{m_1}\underbrace{(b_{m_1+1}b_{m_1+2} \ldots b_{m_1+m_2})}_{m_2}\ldots$, dimana sikel-sikel diatas saling lepas. Untuk melanjutkan π_1 ke π_2 dengan konjugasi di S_n, didefinisikan $\sigma \in S_n$ dengan $\sigma(a_i) = b_i$ untuk semua i. Maka
$\sigma(a_1a_2 \ldots a_{m_1})(a_{m_1+1}a_{m_1+2} \ldots a_{m_1+m_2})\ldots\sigma^{-1} =$
$\sigma(a_1a_2 \ldots a_{m_1})\sigma^{-1}\sigma(a_{m_1+1}a_{m_1+2} \ldots a_{m_1+m_2})\sigma^{-1} \ldots =$
$\Big(\sigma(a_1)\sigma(a_2) \ldots \sigma(a_{m_1})\Big)\Big(\sigma(a_{m_1+1})\sigma(a_{m_1+2}) \ldots \sigma(a_{m_1+m_2})\Big) \ldots =$
$(b_1b_2 \ldots b_{m_1})(b_{m_1+1}b_{m_1+2} \ldots . b_{m_1+m_2}) \ldots = \pi_2$. ■

Catatan 2.13. (Christensen, n.d.). Teorema 2.12 memiliki arti penting didunia nyata: properti permutasilah yang membantu kriptografer Polandia Marian Rejewski dan rekan-rekannya dalam memecahkan versi awal kode Enigma militer Jerman pada tahun-tahun sebelum perang dunia II.

Karena kelas konjugasi suatu permutasi di S_n ditentukan oleh tipe sikelnya, yaitu partisi tertentu dari n, maka banyak nyakelas konjugasi di S_n adalah banyaknya partisi dari n. Misalkan banyaknya partisi dari n dilambangkan dengan $p(n)$. Berikut adalah tabel beberapa nilai. Perhatikan bahwa nilai-nilai pada tabel untuk $n \leq 6$ sesuai dengan jumlah kelas konjugasi yang telah sering dibahas sebelumnnya.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	...

Tabel 3.2. Banyaknya partisi n

Dari teorema 2.12, berikut diberikan contoh 2.14:
Contoh 2.14. Terdapat 5 kelas konjugasi pada S_4 sesuai banyaknya partisi dari 4 atau terdapat 5 tipe sikel dari S_4 diantaranya $(4), (1, 3), (2, 2), (1, 1, 2)$ dan $(1, 1, 1, 1)$, dimana tipe sikel (4) yaitu (1234) dan lainnya. Tipe sikel $(1, 3)$ yaitu $(1)(234)$ dan lainnya. Tipe sikel $(2, 2)$ yaitu $(12)(34)$ dan lainnya. Tipe sikel $(1, 1, 2)$ yaitu $(1)(2)(34)$ dan lainnya. Dan tipe sikel $(1, 1, 1, 1)$ yaitu $(1)(2)(3)(4)$.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil penelitian, penulis memperoleh simpulan sebagai berikut:

1. Kelas konjugasi suatu permutasi di S_n ditentukan oleh tipe sikelnya, yaitu partisi dari n.
2. Kelas-kelas konjugasi pada permutasi di S_n yaitu kelas-kelas konjugasi yang memuat permutasi-permutasi di S_n yang memiliki tipe sikel yang sama. Banyaknya kelas konjugasi sama dengan banyak tipe sikel pada n.

Saran: diperlukan penelitian lanjutan untuk mencari subgrup-subgrup yang berkaitan dengan konjugasi untuk membuktikan teorema-teorema yang berkaitan dengan grup berhingga p, seperti klasifikasi grup berorde p^2 dan adanya subgrup normal dari setiap ordo yang membagi ordo grup-p.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terimakasih kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan rahmat-Nya dan pihak-puhak yang telah membantu dan mendukung penulis baik moril maupun material sehingga penulis dapat menyelesaikan tulisan ini dengan baik.

REFERENCES

Christensen, C. (n.d.). Polish Mathematicians Finding Patterns in Enigma Messages. *Northern Kentucky University*, 247–273.

Conrad, K. (n.d.). *CONJUGATION IN A GROUP*. 20.

Dethan, N. K. F., & Luan, F. (2022). *APLIKASI ARITMATIKA MODULAR DALAM PENGKLASIFIKASIAN KELAS KONJUGASI GRUP DIHEDRAL D2n*. *4*(1), 96–103.

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra* (third). John Wiley & Sons, Inc.

Gallian, J. A. (2010). *CONTEMPORARY ABSTRACT ALGEBRA* (SEVENTH). Richard Stratton.

Herstein, I. N. (1987). *Abstract Algebra* (3rd ed.). Simon & Schuster/A Viacom Company.

Higher Algebra Lectures Notes. (n.d.). Scholl of Mathematics and Statistics.

Rotman, J. J. (1994). *An Introduction to the Theory of Groups* (4th ed.). Department of Mathematics University of Illinois.

Sukirman. (2016). *Teori Grup (Aljabar Abstrak 1)* (2nd ed.). UNY Press.

Suryanti, S. (2017). *Teori Grup (Struktur Aljabar 1)*. UMG Press.