



Deskripsi Kemampuan Pembuktian Langsung Mahasiswa pada Matakuliah Analisis Variabel Riil

Fitriani^{1*}, Meiva Marthaulina Lestari Siahaan²

^{1,2}Universitas Timor

*bhrfitriani@gmail.com

Diterima: 21 Juni 2022 Disetujui: 11 Juli 2022 Dipublikasikan: 30 Juli 2022

ABSTRAK

Penelitian kualitatif ini dilakukan untuk mengetahui gambaran dari kemampuan mahasiswa dalam membuktikan suatu pernyataan matematika pada mahasiswa yang memprogramkan matakuliah analisis variabel riil. Kemampuan pembuktian langsung menjadi kemampuan yang harus dimiliki mahasiswa untuk lulus pada matakuliah analisis variabel riil. Mahasiswa diberikan instrumen berupa soal pembuktian matematis dengan beberapa alternatif jawaban pembuktian. Jawaban mahasiswa direduksi dengan mengelompokkan jawaban pembuktian langsung yang sejenis. Selanjutnya dipilih mahasiswa untuk diwawancarai berdasarkan perwakilan masing-masing kelompok jawaban tersebut. Hasil penelitian menunjukkan bahwa masih terdapat mahasiswa yang tidak mengetahui langkah awal atau pernyataan awal yang digunakan untuk menyusun argumen pembuktian langsung. Namun, ada pula mahasiswa yang sudah dapat menyusun argumen pembuktian dengan baik dan disertai penjelasan untuk setiap argumen yang dituliskan. Hasil penelitian ini juga berguna sebagai bahan refleksi bagi penulis khususnya dalam proses pembelajaran pada matakuliah analisis variabel riil.

Kata kunci: pembuktian langsung, analisis variabel riil, kemampuan.

ABSTRACT

This qualitative research aims to describe the student's ability to prove a mathematical statement that was conducted to students who take real variable analysis course. Direct proof ability is a requirement to pass this real variable analysis courses. Students are given instruments in the form of mathematical proof questions with several alternative proof answers. Student answers are reduced by grouping similar direct proof answers. Furthermore, students were selected to be interviewed based on the representatives of each group of answers. The results showed that there were still students who did not know the initial steps or initial statements used to develop direct proof arguments. However, there are also students who have been able to prepare proof arguments well with explanations for each written argument. The results of this study are also useful as reflection material for writers, especially in the learning process in the real variable analysis course.

Keywords: direct proof, analysis of real variable, ability.

How to Cite: Fitriani & Siahaan, M.M.L (2022). Deskripsi Kemampuan Pembuktian Langsung Mahasiswa pada Matakuliah Analisis Variabel Riil. *Range: Jurnal Pendidikan Matematika*, 4 (1), 112-121.

Pendahuluan

Dalam penawaran matakuliah di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Timor terdapat matakuliah Analisis Variabel Riil sebagai matakuliah wajib. Dalam capaian pembelajaran lulusan program studi menyebutkan bahwa keterampilan umum yang harus dimiliki yaitu mampu menerapkan pemikiran logis, kritis, sistematis, dan inovatif dalam konteks pengembangan atau implementasi ilmu pengetahuan dan teknologi dalam bidang Pendidikan Matematika yang mana hal ini termuat dalam matakuliah analisis variabel riil. Substansi dari matakuliah ini sangat teoritik dan abstrak, dimana pada matakuliah ini, mahasiswa diharapkan dapat membangun suatu argumen yang terstruktur



dan sistematis sehingga berefek pada pola pikir yang terstruktur dan sistematis pula. Dalam matakuliah ini mahasiswa diberikan soal-soal berupa pembuktian dari pernyataan teorema dimana hanya bisa diselesaikan dengan membuat argumen-argumen valid dan sistematis. Berdasarkan pengalaman peneliti yang juga dosen pengampu matakuliah, mahasiswa tidak dapat membuat argumen yang benar ketika membuktikan suatu kalimat teorema. Mahasiswa juga merasa sangat sulit dalam memahami materi matakuliah karena membutuhkan pemikiran untuk dapat membangun argumen yang terstruktur untuk menunjukkan suatu kebenaran dari pernyataan teorema tersebut (Ah, 2016; Hodiyanto & Susiaty, 2018).

Salah satu alasan yang mendasar perlunya mahasiswa melakukan pembuktian yaitu untuk meyakini bahwa pernyataan atau kalimat matematika yang selama ini dianggap benar adalah memang benar (Hernadi, 2013; Hodiyanto & Susiaty, 2018). Fakta yang terjadi yaitu mahasiswa selama ini hanya menghafalkan rumus, kesamaan atau ketaksamaan matematika, serta pernyataan teorema tanpa mencobaa untuk membuktikan sendiri kebenaran dari hal-hal tersebut. Dengan adanya proses pembuktian oleh mahasiswa sendiri dapat mengasah kemampuan berfikir logis mahasiswa (Nurrahmah & Karim, 2018; Izza El Milla & Resti Wulan, 2016; Fadillah, 2019).

Dalam mempelajari matakuliah analisis riil diperlukan pemikiran yang logis dan kemampuan bernalar (Perbowo & Pradipta, 2017; Kartika & Yazidah, 2019). Aturan dalam logika matematika dan bernalar sudah termuat pada beberapa matakuliah seperti pengantar dasar matematika yang menjadi matakuliah prasyarat yang harus dilulusi ketika akan memprogramkan matakuliah analisis riil. Matakuliah tersebut ditawarkan pada semester dua sedangkan matakuliah variabel analisis riil ditawarkan pada semester empat dalam susunan matakuliah pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Timor. Selain itu matakuliah dasar seperti kalkulus dan aljabar linear elementer juga membantu mahasiswa mengingat kembali sifat dan perhitungan dasar terkait bilangan riil.

Tujuan diadakannya penelitian ini yaitu untuk mengetahui gambaran mengenai kemampuan mahasiswa dalam membuat argumen pembuktian. Selain itu dalam penelitian ini juga akan digali pemikiran-pemikiran logis mahasiswa khususnya dalam membuat argumen pembuktian langsung. Dengan mengetahui pemikiran tersebut peneliti dapat memikirkan cara untuk meningkatkan kemampuan mahasiswa khususnya dalam membuktikan pernyataan melalui penerapan model, metode ataupun pendekatan dalam proses pembelajaran. Dari penelitian ini juga diharapkan dapat memberikan masukan kepada dosen pengampu matakuliah untuk menstimulus mahasiswa dalam memahami alur pembuktian langsung. Hal ini diharapkan dapat memperbaiki kualitas mahasiswa khususnya pada Program Studi Pendidikan Matematika sebagai calon guru profesional.

Metode Penelitian

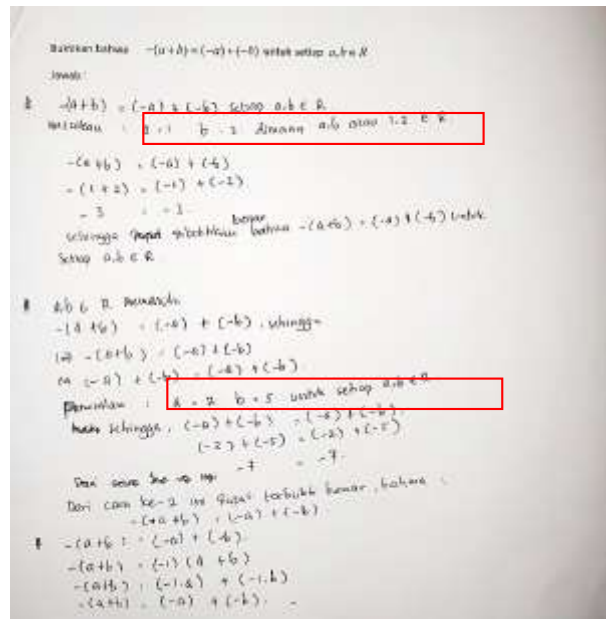
Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif. Subjek penelitian adalah mahasiswa program studi Pendidikan Matematika yang memprogramkan matakuliah analisis variabel riil. Mahasiswa diberikan tes tertulis berupa soal pembuktian langsung. Mahasiswa yang mengikuti tes sebanyak 45 orang yang terbagi dalam dua kelas. Pelaksanaan tes dilakukan di hari yang sama untuk kedua kelas tersebut. Setelah pemberian tes, jawaban mahasiswa direduksi dengan cara mengelompokkan jawaban yang serupa. Berdasarkan kelompok jawaban, dipilih satu jawaban yang mewakili setiap kelompok jawaban yang selanjutnya mahasiswa yang memiliki jawaban tersebut diwawancarai terkait jawaban yang dituliskannya. Selain itu, pemilihan mahasiswa yang diwawancarai juga memperhatikan kemampuan untuk dapat berkomunikasi dengan baik. Dalam pemberian soal tertulis dikondisikan sedemikian rupa sehingga mahasiswa merasa nyaman dan tidak saling menyontek.

Dari hasil jawaban yang terpilih ditelaah pada setiap bagian yang dituliskan dan wawancara berdasarkan apa yang tertulis pada jawaban sehingga peneliti mengetahui pemikiran dibalik tulisan yang ada pada jawaban mahasiswa. Dalam proses wawancara peneliti merujuk pada pedoman wawancara yang selanjutnya dikembangkan sesuai dengan jawaban yang tertulis. Proses wawancara berjalan lancar karena mahasiswa yang dipilih untuk diwawancarai juga mempertimbangkan kemampuan berkomunikasi mahasiswa. Hal ini bertujuan menyempurnakan hasil deskripsi tersebut. Soal yang diberikan yaitu berupa tes uraian yang mana berisi pernyataan matematis dengan banyak cara dalam membuktikannya. Jawaban dari soal tes itu sendiri dapat dilakukan dengan pembuktian langsung menggunakan beberapa aksioma ataupun teorema yang sudah ada sebelumnya. Selanjutnya, deskripsi secara detail dan pemikiran mahasiswa dirincikan dalam hasil penelitian dan pembahasan.

Hasil Penelitian dan Pembahasan

Hasil jawaban mahasiswa setelah proses reduksi diperoleh bahwa terdapat lima kelompok jawaban yang dituliskan oleh 45 orang subyek penelitian. Selanjutnya masing-masing kelompok mewakili tipe jawaban pembuktian. Berikut disajikan kelima tipe jawaban tersebut.

Jawaban tipe 1



Gambar 1. Membuktikan dengan mengambil contoh

Berdasarkan Gambar 1, jawaban tipe ini adalah jawaban yang paling banyak dituliskan oleh mahasiswa. Jawaban tipe ini adalah pembuktian yang **tidak dibenarkan** karena pernyataan yang ingin dibuktikan merupakan pernyataan yang mengandung kuantor umum namun dalam pembuktian. Berdasarkan Gambar 1, mahasiswa mengambil contoh beberapa bilangan real saja. Dari hasil wawancara, mahasiswa sebelumnya sudah mengetahui bahwa tidak diperkenankan mengambil contoh dalam pembuktian pernyataan yang mengandung kata untuk setiap. Namun dikarenakan bingung dalam memikirkan langkah awal untuk memulai pembuktian maka mahasiswa mengambil jalan pintas untuk menunjukkan kebenaran dengan pengambilan contoh. Dalam hal ini, mahasiswa sudah mengetahui bahwa pembuktian dari pernyataan tersebut pasti melibatkan aksioma lapangan dalam bilangan riil. Mahasiswa juga mengingat aksioma tersebut dan beberapa teorema namun belum bisa dalam menyusun argumen berdasarkan aksioma atau teorema yang sudah diketahui sebelumnya.

Jawaban tipe 2

Buktikan bahwa $-(a+b) = (-a) + (-b)$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$

Jawab:

$$-(a+b) = (-a) + (-b)$$

$$-(a+b) = -a - b$$

$$-a - b = -a - b$$

\rightarrow kedua sisi ditambahkan b

$$-a - b + b = -a - b + b$$

$$-a = -a$$

\rightarrow kedua sisi ditambahkan a

$$-a - b + a = -a - b + a$$

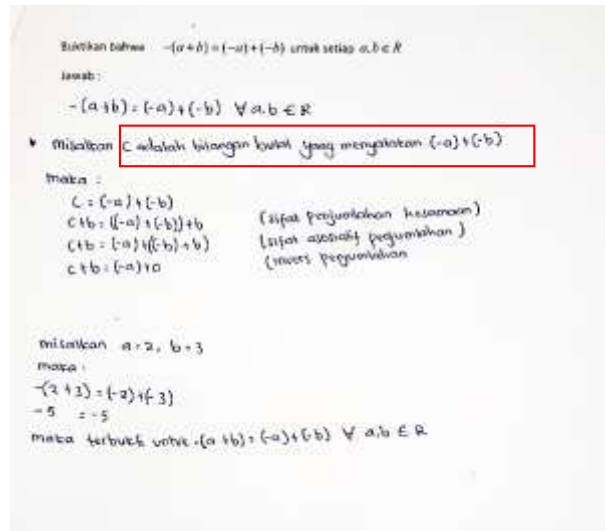
$$-b = -b$$

Maka, terbukti benar untuk semua.

Gambar 2. Menuliskan pernyataan yang akan dibuktikan pada awal pembuktian.

Berdasarkan Gambar 2, jawaban tipe ini juga **tidak dibenarkan** dalam pembuktian matematika karena sudah mengklaim pernyataan yang akan dibuktikan di awal pembuktian, padahal pernyataan tersebut yang akan dibuktikan. Selanjutnya pada gambar 2 juga terlihat jawaban berakhir pada pernyataan yang tidak mengandung arti seperti $-a - b = -a - b$, $-a = -a$ dan $-b = -b$. Dari hasil wawancara, mahasiswa mengatakan bahwa dalam membuktikan pernyataan tersebut merasa kebingungan dengan aksioma atau teorema apa yang harus dituliskan pada awal pembuktian. Pada dasarnya, mahasiswa yang menuliskan jawaban tipe ini sudah mengetahui aksioma dan beberapa teorema yang terkait namun belum bisa menggunakan aksioma dan teorema dalam menyusun argumen pembuktian langsung.

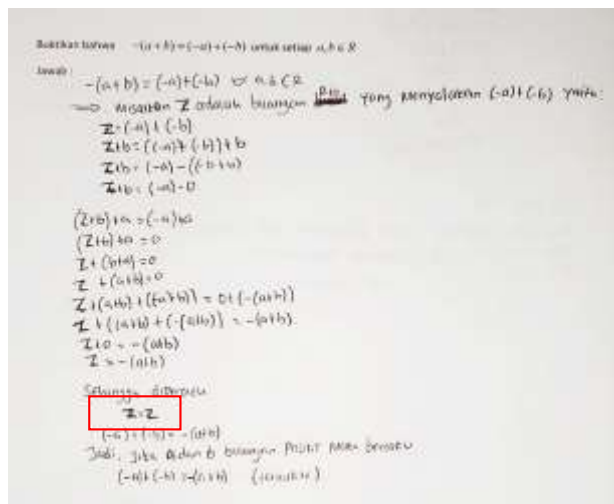
Jawaban tipe 3



Gambar 3. Melakukan pemisalan untuk ruas kiri dan mendapatkan ruas kanan

Berdasarkan Gambar 3, terlihat mahasiswa sudah mampu untuk melakukan pemisalan secara umum namun tidak menuliskan syarat yang menyatakan bahwa pengambilan a, b merupakan sebarang bilangan riil. Dalam Gambar 3 juga terlihat bahwa mahasiswa sudah mampu menuliskan beberapa sifat yang sebenarnya adalah aksioma yang mendukung alur pembuktian langsung dengan benar. Berdasarkan hasil klarifikasi melalui wawancara, mahasiswa mampu menyebutkan bahwa sifat yang dituliskan merupakan aksioma lapangan pada bilangan riil. Dalam hal ini mahasiswa tidak mengingat penomoran untuk aksioma lapangan sehingga hanya menuliskan penyebutan sifatnya saja. Namun di akhir pembuktian, mahasiswa masih menuliskan contoh pengambilan bilangan riil tertentu karena tidak yakin dengan argumen pembuktian yang telah dituliskan sebelumnya.

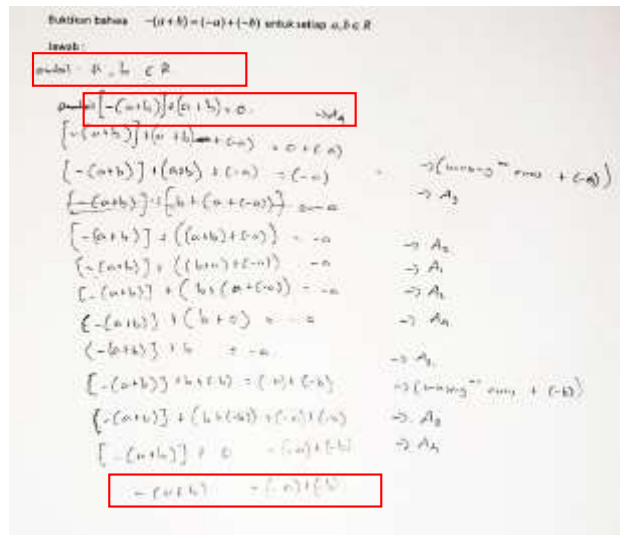
Jawaban Tipe 4



Gambar 4. Menuliskan secara rinci setiap langkah namun tidak disertai keterangan

Terlihat pada Gambar 4, pada jawaban tipe ini mahasiswa sudah merincikan setiap langkah-langkah pembuktian, namun belum menuliskan syarat utama yaitu pengambilan sebarang a, b bilangan riil. Pada gambar 4 juga terlihat mahasiswa tidak menyebutkan aksioma atau sifat yang digunakan pada setiap Langkah-langkah pembuktian. Mahasiswa juga masih menuliskan pernyataan yang tidak mengandung arti yaitu $z = z$. Dari hasil wawancara, mahasiswa lupa penomoran dan penyebutan sifat-sifat pada aksioma lapangan sehingga tidak menuliskan hal tersebut dalam jawaban. Pada tipe jawaban ini mahasiswa menuliskan kesimpulan akhir jawaban namun tidak lengkap karena tidak menuliskan untuk setiap a, b bilangan riil.

Jawaban Tipe 5



Gambar 5. Jawaban lengkap dan disertai keterangan

Berdasarkan Gambar 5, pada tipe jawaban ini mahasiswa mampu menyusun argumen pembuktian dengan benar. Diawal pembuktian sudah menuliskan pengambilan untuk a, b bilangan riil namun berdasarkan wawancara mahasiswa lupa membubuhkan kata sebarang. Mahasiswa memulai pembuktian dari suatu pernyataan dalam aksioma dan berhasil menyusun aksioma menjadi suatu rangkaian pembuktian sehingga mendapatkan pernyataan akhir yang merupakan hal yang harus dibuktikan. Dari Gambar 5 juga terlihat langkah-langkah pembuktian dituliskan secara rinci dan disertai penomoran aksioma dengan benar. Pada saat wawancara, mahasiswa juga dapat menyebutkan sifat untuk setiap aksioma yang digunakan.

Berdasarkan hasil penelitian terlihat bahwa mahasiswa pada umumnya sudah mengerti aturan dalam menyusun langkah pembuktian langsung misalnya dalam menunjukkan kuantor umum tidak boleh hanya dengan mengambil contoh bilangan tertentu. Sebagian besar mahasiswa tidak



memperhatikan kuantor umum yang terdapat pada pernyataan yang ingin dibuktikan misalnya terdapat tulisan untuk setiap a, b bilangan riil yang biasa juga dituliskan dalam notasi matematis $\forall a, b \in R$. Dalam penelitian terdahulu, pembuktian dengan mengambil contoh menjadi suatu kesalahan yang cukup sering dilakukan mahasiswa dalam menyusun pembuktian (Herutomo, 2019; Hodiyanto, 2017).

Dari hasil penelitian juga diperoleh kesalahan yang terjadi pada proses pembuktian yang juga sering dilakukan mahasiswa yaitu dengan memulai dari pernyataan yang akan dibuktikan. Hal ini terlihat pada tipe jawaban yang kedua. Dalam hal ini, kesalahan fatal mahasiswa adalah menggunakan pernyataan matematis yang ingin dibuktikan. Hal ini akan mengakibatkan diakhir pembuktian mendapatkan suatu pernyataan yang tidak mengandung arti. Terlihat dari jawaban tipe dua di akhir pembuktian ditemukan persamaan $-a = -a$ dan $-b = -b$. Hasil yang sama juga diperoleh pada saat mahasiswa melakukan pembuktian pernyataan yang melibatkan bilangan asli (Laja & Fitriani, 2022; Sinaga et al., 2019).

Berdasarkan tipe jawaban yang dihasilkan, terlihat kreatifitas mahasiswa dalam menyusun alur pembuktian. Hal ini ditandai dengan mahasiswa memikirkan berbagai cara dari mulai melakukan pemisalan dalam bilangan sampai dengan pemisalan secara umum, serta dengan memulai pembuktian dari suatu pernyataan aksioma. Dengan demikian, terdapat pemikiran kreatif yang tercipta pada saat mahasiswa menyusun pembuktian (Prajitno, 2020; Sumarno et al., 2012). Selanjutnya, dalam menyusun argumen pembuktian, mahasiswa juga melalui tahapan proses berfikir yang lebih tinggi. Hal ini tercermin dari hasil wawancara bahwa ketika mahasiswa menyusun pembuktian, mahasiswa sudah mengetahui aksioma, definisi, serta pernyataan teorema yang sudah ada sebelumnya, tetapi tidak mudah meramu ketiga hal tersebut menjadi suatu alur pembuktian yang tepat. Proses berfikir seperti inilah yang dapat dikategorikan sebagai kemampuan metakognitif yang dilalui mahasiswa ketika menyusun argumen pembuktian (Iswahyudi, 2012).

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan disimpulkan beberapa hal terkait deskripsi kemampuan pembuktian langsung mahasiswa program studi Pendidikan Matematika Universitas Timor. Mahasiswa pada umumnya sudah paham hal-hal yang harus diperhatikan dalam pembuktian langsung. Ditemukan mahasiswa yang tidak mengetahui langkah awal atau pemikiran awal untuk mengkonstruksi suatu bukti. Ada pula mahasiswa yang menuliskan pernyataan yang akan dibuktikan di awal pembuktian yang disusunnya. Hanya sebagian kecil mahasiswa yang bisa memikirkan pernyataan awal atau pemisalan awal secara umum yang kemudian dengan menerapkan aksioma atau teorema yang tepat

sehingga memperoleh pernyataan akhir yang tidak lain merupakan pernyataan yang harus dibuktikan. Terdapat mahasiswa yang masih menuliskan pernyataan matematis yang tidak mengandung arti misalnya $z = z$. Mahasiswa kurang mencermati kuantor yang ada pada pernyataan yang ingin dibuktikan.

Setelah melakukan penelitian ini, penulis yang juga merupakan dosen pengampu matakuliah analisis variabel riil memperoleh gambaran dan beberapa hal-hal yang menjadi kelemahan mahasiswa dalam menyusun pembuktian langsung. Oleh karena itu penulis harus lebih menekankan kepada mahasiswa untuk teliti dan memahami setiap makna dari pernyataan matematis yang akan dibuktikan. Penulis juga harus memberikan banyak latihan soal terkait pembuktian langsung sehingga mahasiswa diharapkan dapat terbiasa dengan soal-soal pembuktian dan mengasah analisa mahasiswa dalam berargumen serta menyusun pembuktian langsung. Selain itu penulis juga tertantang dalam memikirkan dan menerapkan suatu *treatment* tertentu khususnya dalam proses pembelajaran sehingga hal tersebut diharapkan dapat meningkatkan kemampuan berfikir logis dan sistematis mahasiswa.

Ucapan Terima Kasih

Dalam pelaksanaan dan penyelesaian penelitian serta tulisan ini melibatkan berbagai pihak. Oleh karena itu, tim peneliti mengucapkan terima kasih kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat Universitas Timor yang telah memberikan izin penelitian ini. Selain itu peneliti juga mengucapkan terima kasih kepada Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Timor sebagai pimpinan pada tempat peneliti melakukan penelitian. Terima kasih yang sebesar-besarnya juga peneliti sampaikan kepada para mahasiswa khususnya yang menjadi subjek penelitian. Ucapan terima kasih juga disampaikan kepada pihak-pihak lainnya yang tidak dapat peneliti sebutkan satu persatu.

Daftar Pustaka

- Ah, N. I. (2016). Pengembangan Bahan Ajar Mata Kuliah Analisis Real Berbasis Pembuktian Pada Semester V UNMUH JEMBER. *Jurnal Gammath, 1* Nomor 2(2), 26–32.
- Fadillah, A. (2019). Analisis Kemampuan Penalaran Deduktif Matematis Siswa. *JTAM | Jurnal Teori Dan Aplikasi Matematika, 3*(1), 15. <https://doi.org/10.31764/jtam.v3i1.752>
- Hernadi, J. (2013). Metoda Pembuktian dalam Matematika. *Jurnal Pendidikan Matematika, 2*(1), 1–13. <https://doi.org/10.22342/jpm.2.1.295>.
- Herutomo, R. A. (2019). Kesalahan Mahasiswa dalam Pembuktian Matematik. *Jurnal Didaktik Matematika, 6*(1), 54–68. <https://doi.org/10.24815/jdm.v6i1.13262>
- Hodiyanto, H. (2017). Analisis Kesalahan Mahasiswa Semester V dalam Mengerjakan Soal Pengantar Analisis Real. *Edu Sains: Jurnal Pendidikan Sains & Matematika, 5*(1), 33. <https://doi.org/10.23971/eds.v5i1.641>
- Hodiyanto, H., & Susiaty, U. D. (2018). Peningkatan Kemampuan Pembuktian Matematis Melalui



- Model Pembelajaran Problem Posing. *MaPan*, 6(1), 128–137. <https://doi.org/10.24252/mapan.2018v6n1a12>
- Iswahyudi, G. (2012). Aktivitas Metakognisi dalam Memecahkan Masalah Pembuktian Langsung Ditinjau dari Gender dan Kemampuan Matematika. *Seminar Nasional Program Studi Pendidikan Matematika UNS Surakarta*, 1–19.
- Izza El Milla, Y., & Resti Wulan, E. (2016). Proses Metakognitif Mahasiswa S1 Pendidikan Matematika Tahun Pertama Dalam Menyelesaikan Masalah Pembuktian Sederhana. *Jurnal Pendidikan Dan Pengembangan Profesi (JP3)*, 6(Maret).
- Kartika, E. D., & Yazidah, N. I. (2019). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis Pada Matakuliah Analisis Real Berdasarkan Adversity Quotient. *Prima: Jurnal Pendidikan Matematika*, 3(2), 152. <https://doi.org/10.31000/prima.v3i2.1385>
- Laja, Y. P. W., & Fitriani, F. (2022). Providing a Proof and Providing Non-Proof Argument. *Proceedings of the 2nd National Conference on Mathematics Education 2021 (NaCoME 2021)*, 656(NaCoME 2021), 243–247. <https://doi.org/10.2991/assehr.k.220403.035>
- Nurrahmah, A., & Karim, A. (2018). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis Pada Matakuliah Teori Bilangan. *JURNAL E-DuMath*, 4(2), 21. <https://doi.org/10.26638/je.753.2064>
- Perbowo, K. S., & Pradipta, T. R. (2017). Pemetaan Kemampuan Pembuktian Matematis Sebagai Prasyarat Mata Kuliah Analisis Real Mahasiswa Pendidikan Matematika. *KALAMATIKA Jurnal Pendidikan Matematika*, 2(1), 81. <https://doi.org/10.22236/kalamatika.vol2no1.2017pp81-90>
- Prajitno, S. H. (2020). Analisis Kreativitas Mahasiswa Dalam Menyelesaikan Pembuktian Langsung Pada Mata Kuliah Teori Bilangan. *Media Pendidikan Matematika*, 8(2), 43. <https://doi.org/10.33394/mpm.v8i2.3068>
- Sinaga, R. F., Si, M., Siahaan, D. F. B., & Pd, M. (2019). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis Mahasiswa dengan Pendekatan Konstruktivisme pada Mata Kuliah Teori Bilangan. *JKIPM (Jurnal Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Matematika)*, 1, 58–63.
- Sumarno, U., Hidayat, W., Zukarnaen, R., Hamidah, & Sariningsih, R. (2012). Kemampuan Dan Disposisi Berpikir Logis, Kritis, Dan Kreatif Matematik. *Jurnal Pengajaran MIPA*, 10–27.