RANGE : Jurnal Pendidikan Matematika
Dikelolah Oleh Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Timor
ISSN Online : 2685-2373

Volume 5, Nomor 2, Januari 2024, pp.143-153

ANALISIS KEMAMPUAN MAHASISWA DALAM MENGONSTRUKSI PEMBUKTIAN PADA MATA KULIAH PENGANTAR ANALISIS REAL

Febi Sanjaya
Universitas Sanata Dharma
Email: febi@usd.ac.id

Diterima: 24 November 2023. Disetujui: 30 Januari 2024. Dipublikasikan:30 Januari 2024.

ABSTRAK

Pembuktian memiliki peranan penting dalam hal belajar dan mengajar matematika, sehingga hal ini penting bagi mahasiswa pendidikan matematika. Akan tetapi mahasiswa masih kesulitan dalam mengonstruksi pembuktian. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui kemampuan mahasiswa dalam mengonstruksi pembuktian pada mata kuliah Pengantar Analisis Real. Penelitian ini menggunakan metode deskriptif kuantitatif, dengan menggunakan instrumen berupa 3 soal essay untuk mengetahui kemampuan mahasiswa dalam mengkonstruksi pembuktian. Subyek dari penelitian ini adalah 31 mahasiswa program studi Pendidikan Matematika. Hasil penelitian ini adalah 74% mahasiswa sudah mampu mengonstruksi bukti dengan benar untuk permasalahan sederhana (permasalahan 1), tetapi kurang dari 30% mahasiswa yang mampu mengonstruksi bukti dengan benar untuk permasalahan yang lebih kompleks (permasalahan 2 dan 3).

Kata kunci: analisis real, kemampuan mengonstruksi bukti, pembuktian, supremum

ABSTRACT

Proof has an important role in learning and teaching mathematics, so this is important for mathematics education students. However, students still have difficulty constructing proof. This study was to determine the ability of students in constructing proof in the Introduction to Real Analysis course. The methode of the research was descriptive quantitative approach, using the essay questions as an instruments to determine the ability of students to construct proof. The subjects of this study were 31 students of Mathematics Education Department. The results of this research were that 74% of students were able to construct evidence correctly for simple problems (problem 1), but less than 30% of students were able to construct proof correctly for more complex problems (problems 2 and 3).

Keywords: real analysis, ability in constructing proof, proof, supremum

How to Cite: Sanjaya, F. (2024). Analisis Kemampuan Mahasiswa dalam Mengonstruksi Pembuktian pada Mata Kuliah Pengantar Analisis Real. *Range: Jurnal Pendidikan Matematika*, **5** (2), 143-153.

Pendahuluan

Seringkali orang mengidentikkan pembelajaran matematika dengan berhitung. (Kusuma, 2006; Mulhamah, 2018) Padahal, matematika secara formal menurut Hariwijaya (2009) adalah proses menelaah struktur abstrak dengan definisi aksiomatis menggunakan logika beserta notasi. Lebih lanjut, menurut Suherman (1992), proses berpikir mendasari perkembangan dan pertumbuhan matematika. Selain itu, Rosnawati (2011) menyatakan bahwa kemampuan penalaran matematika dibutuhkan untuk dapat menguasai matematika. Dengan demikian, matematika tidak sekadar berhitung, tetapi ada hal yang lebih mendasar yaitu berlogika.

Salah satu bagian penting dalam matematika yang sarat dengan logika adalah pembuktian matematika. Stefanowicz & Kyle (2014) mengatakan bahwa bukti merupakan urutan pernyataan logis, satu pernyataan berakibat pernyataan lain, yang memberikan penjelasan mengapa pernyataan tersebut benar. Membuktikan memiliki peranan penting dalam hal belajar dan mengajar pada matematika (Selden & Selden, 2003). Pembuktian dalam matematika juga merupakan salah satu hal penting, khususnya pada konstruksi yang dibuat oleh siswa dalam membuktikan konsep dalam pembelajaran matematika. (Tall, 1989) Oleh karena itu, sebagai seorang calon guru matematika, mahasiswa pendidikan matematika diberikan bekal tentang pembuktian matematika. Hal ini bertujuan agar mereka mampu memahami matematika secara lebih menyeluruh dan mampu menjelaskan pada siswa terkait teorema maupun pernyataan dalam matematika yang akan mereka ajarkan.

Penelitian-penelitian terkait dengan pembuktian sudah banyak dilakukan. (Ellu et al., 2022; Fadiana et al., 2021; Güler, 2016; Mujib, 2019; Siregar, 2016; Weber K, 2001; Wijayanti, 2018; Yuniati, 2014) Beberapa penelitian pembuktian tersebut dianalisis dengan beberapa metode yang meliputi topik geometri, aljabar abstrak, teori bilangan. (Fadiana et al., 2021; Mahfudy, 2017; Nurrahmah & Karim, 2018; Weber K, 2001). Dari pengalaman peneliti dalam mengajar mata kuliah Pengantar Analisis Real, masih banyak mahasiswa yang belum mampu mengonstruksi pembuktian dengan baik. Oleh karena itu, penelitian ini akan mengidentifikasi sejauh mana kemampuan mahasiswa dalam mengonstruksi pembuktian pada mata kuliah Pengantar Analisis Real. Hasil dari identifikasi ini diharapkan dapat digunakan dosen untuk mengembangkan pembelajaran sehingga mahasiswa lebih mampu memahami dan mengonstruksi pembuktian.

Metode Penelitian

Penelitian yang digunakan yaitu penelitian deskriptif kuantitatif. Penelitian ini dilakukan di Universitas Sanata Dharma pada mahasiswa yang sedang menempuh matakuliah Pengantar Analisis Real sebanyak 31 orang. Teknik pengumpulan data yang digunakan adalah pengerjaan tes berbentuk essay. Soal tes yang diberikan terdiri dari 3 soal sebagai berikut.

1. Diberikan himpunan $A = \{-1, 1, 2, 3\}$. Buktikan bahwa $inf A = -1$.
2. Diberikan himpunan $B = \left\{-\frac{2}{3n} - 1, n \in \mathbb{N}\right\}$.
   a. Tentukan $sup\, B$!
   b. Buktikan $sup\, B$ yang diperoleh di atas!
3. Diberikan himpuna*n* $A \neq \emptyset$ dan didefinisikan $kA = \{kx, x \in A\}$. Jika $k < 0$, tunjukkan bahwa $k\, sup\, A = inf\, kA$

Proses menganalisis data yang dilakukan adalah dengan melihat hasil dari pengerjaan tes pada setiap nomor, kemudian dianalisis mengunakan pembagian kemampuan mengontruksi pembuktian yang dari (Weber K, 2001) yang sudah disesuaikan dengan menggunakan huruf A, B, C dengan rincian sebagai berikut:

Tabel 1. *Kode Kemampuan Pembuktian Menurut Webber*

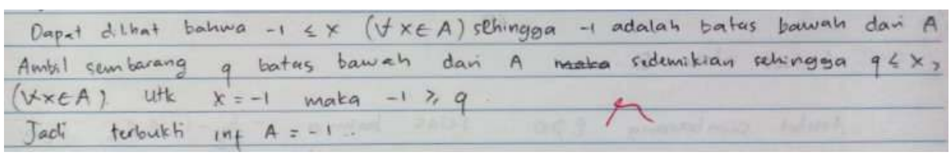
Kode	Keterangan
A	Mampu mengonstruksi bukti dengan benar
B	Mampu mengonstruksi sebagian bukti dengan benar
C	Belum mampu mengonstruksi bukti secara benar

Pada proses ini, subjek yang tidak mengerjakan soal dianggap tidak valid sehingga datanya tidak dihitung. Selanjutnya hasil tersebut akan kita deskripsikan hasilnya dengan statistik deskriptif per nomor.

Hasil Penelitian dan Pembahasan

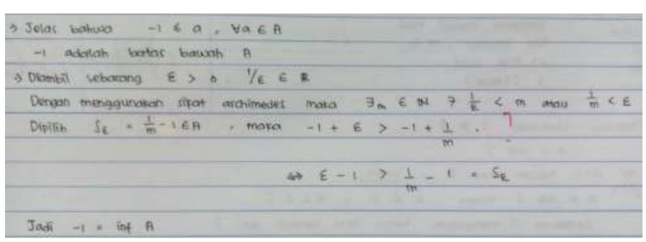
Soal No.1

Pada soal no.1 siswa diminta membuktikan bahwa $\inf A = -1$ dengan himpunan $A = \{-1,1,2,3\}$. Berikut data hasil pekerjaan mahasiswa.


Dapat dilihat bahwa $-1 \leq x$ $(\forall x \in A)$ sehingga -1 adalah batas bawah dari A
Ambil sembarang q batas bawah dari A ~~maka~~ sedemikian sehingga $q \leq x$, $(\forall x \in A)$ utk $x = -1$ maka $-1 \geq q$.
Jadi terbukti $\inf A = -1$.

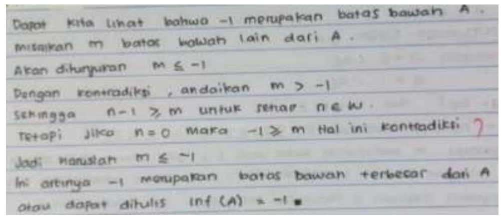
Gambar 1. *Contoh benar hasil pekerjaan mahasiswa No.1.*

Gambar 1 merupakan contoh hasil pekerjaan mahasiswa yang benar. Pada gambar tersebut menunjukkan mahasiswa mampu membuktikan dengan menggunakan definisi. Mahasiswa mampu menunjukkan bahwa -1 merupakan batas bawah, selanjutnya membandingkan dengan sembarang batas bawah dan diperoleh -1 merupakan yang terkecil.


→ Jelas bahwa $-1 \leq a$, $\forall a \in A$
-1 adalah batas bawah A
→ Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. $1/\varepsilon \in \mathbb{R}$
Dengan menggunakan sifat archimedes maka $\exists m \in \mathbb{N} \ni \frac{1}{\varepsilon} < m$ atau $\frac{1}{m} < \varepsilon$
Dipilih $S_\varepsilon = \frac{1}{m} - 1 \in A$, maka $-1 + \varepsilon > -1 + \frac{1}{m}$.
$\Leftrightarrow \varepsilon - 1 > \frac{1}{m} - 1 = S_\varepsilon$
Jadi $-1 = \inf A$

Gambar 2. *Contoh 1 kriteria C hasil pekerjaan mahasiswa No.1.*

Gambar 2 merupakan contoh hasil pekerjaan mahasiswa dengan kriteria C, yaitu belum mampu mengonstruksi bukti. Pada gambar tersebut mahasiswa telah mampu menunjukkan bahwa -1 merupakan batas bawah himpunan A. Selajutnya mahasiswa membuktikan infimum dengan menggunakan epsilon. Mahasiswa menggunakan sifat Archimedes, padahal ini tidak perlu. Juga mahasiswa menuliskan $s_\epsilon = 1/m - 1 \in A$, di mana hal ini tidak benar. Dari kedua hal tersebut, penulis menduga bahwa mahasiswa tidak memahami dasar kostruksi bukti.


Dapat kita lihat bahwa -1 merupakan batas bawah A.
misalkan m batas bawah lain dari A.
Akan ditunjukan $m \leq -1$
Dengan kontradiksi, andaikan $m > -1$
sehingga $n-1 \geq m$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Tetapi jika $n = 0$ maka $-1 \geq m$ Hal ini kontradiksi ?
Jadi haruslah $m \leq -1$
Ini artinya -1 merupakan batas bawah terbesar dari A
atau dapat ditulis $\inf(A) = -1$ ■

Gambar 3. *Contoh 2 kriteria C hasil pekerjaan mahasiswa No.1.*

Gambar 3 merupakan contoh lain hasil pekerjaan mahasiswa dengan kriteria C, yaitu belum mampu mengonstruksi bukti. Pada gambar tersebut mahasiswa telah mampu menunjukkan bahwa -1 merupakan batas bawah himpunan A. Selajutnya mahasiswa membuktikan infimum dengan membandingkannya dengan batas bawah lain, misalkan m. Karena akan ditunjukkan $m \leq 1$, mahasiswa membuktikan dengan kontradiksi, yaitu $m > 1$. Selanjutnya mahasiswa menuliskan $n - 1 \geq m$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jelas hal ini tidak benar. Dari hal tersebut, penulis menduga bahwa mahasiswa tidak memahami dasar kostruksi bukti.

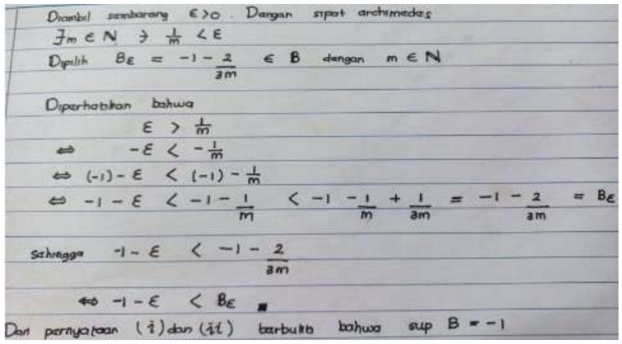
Tabel 3. *Kemampuan Pembuktian Soal No.1*

No	Kemampuan Pembuktian	Banyak Subjek
1.	A	23
2.	C	8

Soal nomor 1 ini adalah soal pembuktian yang paling mudah di antara lainnya. Hal ini dikarenakan himpunan yang diberikan berhingga sehingga untuk membuktikannya dapat menggunakan definisi infimum yang sederhana yaitu menunjukkan bahwa -1 adalah batas bawah dan dengan membandingkan sembarang batas bawah lain dengan -1, yang merupakan anggota himpunan. Selain itu hal yang mirip juga pernah dibahas dalam pembelajaran sehingga wajar bila cukup banyak yang bisa menyelesaikannya. Hal tersebut juga menjadi akibat tidak ditemukannya kemampuan tipe D.

Soal No.2

Pada soal no.2 siswa diminta menentukan supremum dari himpunan $B = \left\{-\frac{2}{3n} - 1, n \in \mathbb{N}\right\}$ dan membuktikannya. Berikut data hasil pekerjaan mahasiswa.



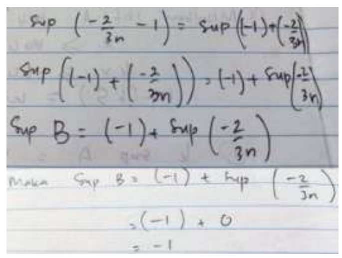
Diambil sembarang $\epsilon > 0$. Dengan sifat archimedes
$\exists m \in N \ni \frac{1}{m} < \epsilon$
Dipilih $B_\epsilon = -1 - \frac{2}{3m} \in B$ dengan $m \in N$

Diperhatikan bahwa
$\epsilon > \frac{1}{m}$
$\Leftrightarrow -\epsilon < -\frac{1}{m}$
$\Leftrightarrow (-1) - \epsilon < (-1) - \frac{1}{m}$
$\Leftrightarrow -1 - \epsilon < -1 - \frac{1}{m} < -1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{3m} = -1 - \frac{2}{3m} = B_\epsilon$

Sehingga $-1 - \epsilon < -1 - \frac{2}{3m}$
$\Leftrightarrow -1 - \epsilon < B_\epsilon$ ■
Dari pernyataan (i) dan (ii) terbukti bahwa sup $B = -1$

Gambar 4. *Contoh 1 hasil pekerjaan mahasiswa No.2 yang benar*

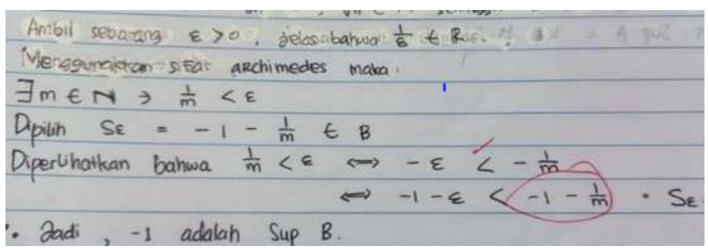
Gambar 4 merupakan contoh hasil pekerjaan mahasiswa yang benar. Pada gambar tersebut mahasiswa telah mampu membuktikan supremum dengan menggunakan epsilon. Mahasiswa mampu menggunakan sifat Archimedes, juga melakukan pemilihan B_ϵ dengan tepat.



Sup $\left(-\frac{2}{3n} - 1\right) = \sup\left((-1) + \left(-\frac{2}{3n}\right)\right)$
Sup $\left((-1) + \left(-\frac{2}{3n}\right)\right) = (-1) + \sup\left(-\frac{2}{3n}\right)$
Sup $B = (-1) + \sup\left(-\frac{2}{3n}\right)$
Maka Sup $B = (-1) + \sup\left(-\frac{2}{3n}\right)$
$= (-1) + 0$
$= -1$

Gambar 5. *Contoh 2 hasil pekerjaan mahasiswa No.2 yang benar*

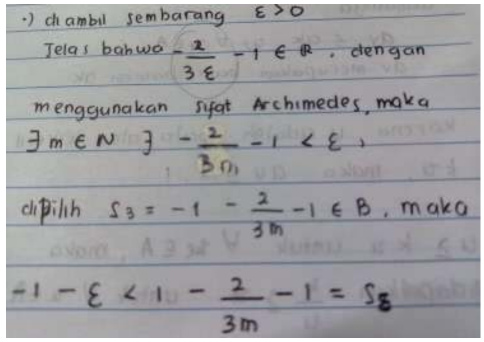
Gambar 5 merupakan contoh lain hasil pekerjaan mahasiswa yang benar. Pada gambar tersebut mahasiswa telah mampu membuktikan supremum dengan menggunakan sifat pada supremum, yaitu $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.



Ambil sebarang $\epsilon > 0$, jelas bahwa $\frac{1}{\epsilon} \in R$.
Menggunakan sifat archimedes maka
$\exists m \in N \ni \frac{1}{m} < \epsilon$
Dipilih $S_\epsilon = -1 - \frac{1}{m} \in B$
Diperhatikan bahwa $\frac{1}{m} < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < -\frac{1}{m}$
$\Leftrightarrow -1 - \epsilon < -1 - \frac{1}{m} = S_\epsilon$
∴ Jadi, -1 adalah Sup B.

Gambar 6. *Contoh kriteria B hasil pekerjaan mahasiswa No.2.*

Gambar 6 merupakan contoh hasil pekerjaan mahasiswa dengan kriteria B, yaitu konstruksi bukti terbatas. Pada gambar tersebut mahasiswa telah mampu menunjukkan bahwa -1 merupakan batas atas himpunan B. Selajutnya mahasiswa membuktikan supremum dengan menggunakan epsilon. Ide pembuktian beserta konstruksinya sudah menuju pada apa yang dibuktikan. Sifat Archimedes yang dituliskan mahasiswa tepat, hanya saja tidak sesuai dengan kepentingan pembuktian sehingga menyebabkan mahasiswa menuliskan $s_\epsilon = -1 - \frac{1}{m} \in B$. Padahal hal tersebut tidak tepat. Penulis menduga bahwa mahasiswa terkendala pada keterbatasan belum memahami definisi supremum dengan epsilon secara utuh.



***Gambar** 7. Contoh kriteria C hasil pekerjaan mahasiswa No.2.*

Gambar 7 merupakan contoh hasil pekerjaan mahasiswa dengan kriteria C, yaitu belum mampu mengonstruksi bukti. Dari gambar tersebut terlihat bahwa mahasiswa mencoba untuk membuktikan supremum dengan epsilon. Akan tetapi, mahasiswa tersebut tidak memiliki konstruksi bukti yang jelas. Ini terlihat dari penggunaan sifat Archimedes yang tidak tepat dan bukti yang tidak sistematis. Rekap hasil kemampuan pembuktian no.2 terlihat dalam tebael berikut. Ada 8 orang yang salah dalam menentukan supremum sehingga pembuktian yang dilakukan dianggap tidak valid.

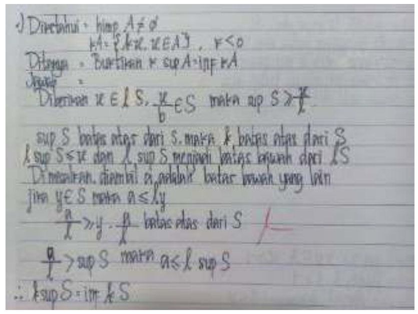
***Tabel 3.** Kemampuan Pembuktian Soal No.3*

No	Kemampuan Pembuktian	Banyak Subjek
1.	A	5
2.	B	10
3.	C	8

Soal nomor 2 ini cenderung lebih sulit dari soal nomor 1. Hal ini dikarenakan himpunan yang diberikan adalah tak hingga sehingga untuk membuktikannya perlu menggunakan definisi supremum yang lebih kompleks dan bersifat formal matematis menggunakan epsilon (ϵ) yang pada prosesnya akan dihubungkan dengan sifat Archimedes. Jadi, meskipun persoalan yang mirip juga pernah dibahas dalam pembelajaran subjek masih kesulitan dalam menyelesaikannya. Beberapa mahasiswa diduga masih kesulitan dalam memahami konsep proses pembuktian pada contoh yang diberikan. Lebih lanjut, terlihat bahwa ada cukup banyak mahasiswa yang menuliskan '$-1 - \frac{1}{m} \in B$' dalam pembuktiannya. Bentuk $\frac{1}{m}$ ini sebenarnya muncul pada permasalahan yang pernah dibahas pada pembelajaran. Ini mengindikasikan bahwa mahasiswa belum memahami pembuktian yang menggunakan ϵ (epsilon) yang harus dihubungkan dengan n sesuai sifat Archimedes. Akan tetapi, terlihat pula beberapa mahasiswa cukup baik dalam membuktikan dengan menggunakan sifat $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ yang berlaku pada supremum.

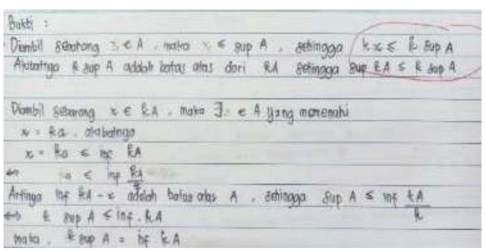
Soal no.3

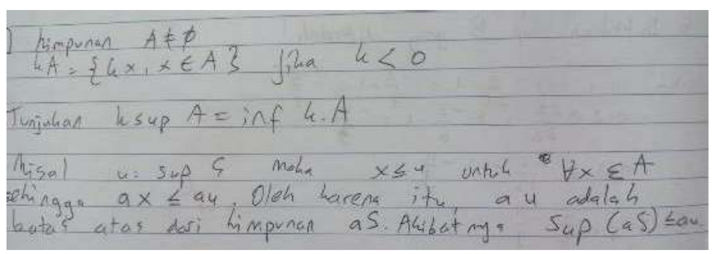
Pada soal no.4 mahasiswa diminta menunjukkan bahwa $k\, sup\, A = inf\ kA$ untuk $k < 0$.



Gambar 8. *Contoh benar hasil pekerjaan mahasiswa No.3.*

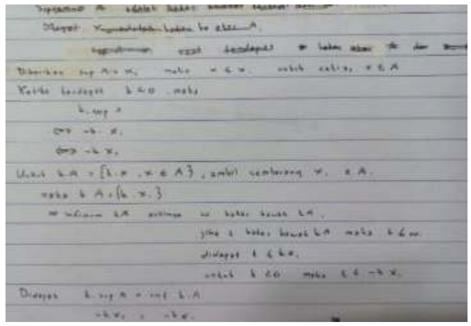
Gambar 8 merupakan contoh hasil pekerjaan mahasiswa yang benar. Pada gambar tersebut mahasiswa telah mampu memahami dan menggunakan konsep-konsep pada supremum dan infimum. Selain itu, terlihat bahwa mahasiswa dapat menggunakan ide dan sistematika pembuktian dengan benar.





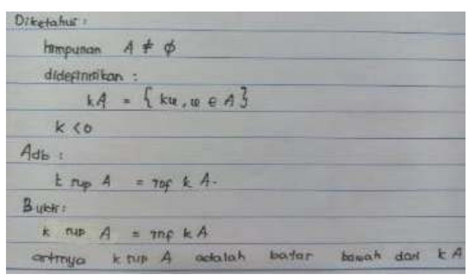
Gambar 9*. Contoh kriteria B hasil pekerjaan mahasiswa No.3.*

Gambar 9 merupakan contoh hasil pekerjaan mahasiswa dengan kriteria B, yaitu konstruksi bukti terbatas. Dalam hal ini sebagian proses pembuktian sudah ditunjukkan mahasiswa secara benar, tetapi sebagian lain masih salah. Beberapa kesalahan terjadi karena mahasiswa kurang mencermati bahwa $k < 0$, yaitu: 1) Menuliskan $u = \sup A,\ kx \leq ku$, 2) $kx \leq u \Leftrightarrow x \leq \frac{u}{k} \sup A = \frac{u}{k}$. Selain itu, ada pula yang mengambil kesimpulan yang belum tentu benar seperti $v \leq ka$ maka $v = \inf kA$.



__Gambar 10__. Contoh 1 kriteria C hasil pekerjaan mahasiswa No.4.

Gambar 10 merupakan contoh hasil pekerjaan mahasiswa dengan kriteria C, yaitu tidak memahami konstruksi bukti. Kesalahan pembuktian yang terjadi diantaranya, terdapat proses pembuktian yang tidak jelas, yaitu $k \sup A \Leftrightarrow -kx_1$.


Diketahui :
himpunan $A \neq \phi$
didefinisikan :
$kA = \{ku, u \in A\}$
$k < 0$
Adb :
$k \sup A = \inf kA$.
Bukti:
$k \sup A = \inf kA$
artinya $k \sup A$ adalah batas bawah dari kA

***Gambar 11.** Contoh 2 kriteria C hasil pekerjaan mahasiswa No.4.*

Ditemukan pula 5 mahasiswa yang menggunakan pernyataan yang akan dibuktikan, $k \sup A = \inf kA$ sebagai langkah awal pembuktian, seperti pada gambar 11. Ini berarti mahasiswa tersebut masuk pada kriteria C.

Soal nomor 4 merupakan pembuktian pada sifat supremum. Pembuktian pada soal ini lebih panjang dari soal nomor 1 maupun 2 tetapi tidak perlu mnggunakan ϵ. Ide pembuktian soal ini adalah dengan menunjukkan bahwa $k \sup A$ merupakan batas bawah kA dengan menggunakan sifat $\sup A$ dan $\inf kA$. Selanjutnya dengan membandingkan $k \sup A$ dengan batas bawah kA yang lain.

Selanjutnya persentase tiap kriteria tiap nomor soal dirangkum pada tabel 5. Hasil tersebut menunjukkan bahwa sebagian besar mahasiswa dapat mengerjakan soal nomor 1 (74%). Hal tersebut sangat kontras dengan hasil nomor 2 dan 3 di mana kurang dari 30% mahasiswa yang mampu menyelesaikannya. Hasil ini sejalan dengan penelitian Weber K (2001) bahwa 100% mahasiswa mampu membuktikan dengan benar soal yang sederhana, dan hanya 30% yang mampu membuktikan persoalan yang kompleks. Beberapa penelitian lain juga mengatakan hasil yang hampir sama, secara umum, tanpa melihat pembuktian tersebut sederhana maupun kompleks, lebih dari 60% mahasiswa masih kesulitan dalam pembuktian. (Fadiana et al., 2021; Nurrahmah & Karim, 2018)

Tabel 5. *Hasil pekerjaan dari setiap nomor*

No.	Kriteria	Banyak Mahasiswa	Persentase
1	A	23	74%
	C	8	26%
2	A	5	16%
	B	10	32%
	C	8	26%
3	A	8	26%
	B	13	43%
	C	9	29%

Permasalahan nomor 1 dan 2 tersebut sebenarnya sudah pernah dibahas dalam perkuliahan dengan bentuk yang sedikit berbeda. Hal ini menunjukkan bahwa mahasiswa dapat membuktikan permasalahan sederhana, yang tidak banyak memunculkan ide seperti nomor 1. Akan tetapi untuk pembuktian yang lebih kompleks, seperti nomor 2, yang memerlukan keterhubungan ϵ, mereka masih kesulitan. Mereka dapat menuliskan fakta-fakta tetapi tidak mempunyai ide dalam memproses fakta tersebut menjadi pernyataan matematis yang benar. Secara lebih detail, menurut peneliti, mahasiswa memang belum memahami keterhubungan antara ϵ dan x_ϵ. Atau kemungkinan lain, mahasiswa sudah memahami keterhubungan antara ϵ dan x_ϵ, tetapi kreativitas mahasiswa dalam pembuktian masih terbatas. Ini hampir sama dengan yang disampaikan Weber K (2001) dan Mujib (2019) bahwa strategi pembuktian masih minim.

Kesimpulan

Untuk permasalahan sederhana (permasalahan 1), 74% mahasiswa sudah mampu mengonstruksi bukti dengan benar. Sedangkan untuk permasalahan yang lebih kompleks (permasalahan 2 dan 3), kurang dari 30% mahasiswa yang mampu mengonstruksi bukti dengan benar.

Saran untuk penelitian selanjutnya, penelitian kemampuan mengonstruksi bukti akan lebih baik jika dilengkapi dengan wawancara agar hasil penelitian menjadi lebih valid. Penelitian juga dapat dilanjutkan dengan mengembangkan strategi pembelajaran agar kemampuan mengonstruksi bukti menjadi lebih baik.

Daftar Pustaka

Ellu, R. N., Mamoh, O., & Suddin, S. (2022). Analisis Kemampuan Penalaran Matematis Mahasiswa Dalam Menyelesaikan Soal Grup. *Range: Jurnal Pendidikan Matematika*, *3*(2), 181–193. https://doi.org/10.32938/jpm.v3i2.1613

Fadiana, M., Yulaikah, Y., & Lajianto, L. (2021). Tipe Pembuktian Mahasiswa Calon Guru Matematika. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *10*(1), 351. https://doi.org/10.24127/ajpm.v10i1.3443

Güler, G. (2016). The Difficulties Experienced in Teaching Proof to Prospective Mathematics Teachers: Academician Views. *Higher Education Studies*, *6*(1), 145. https://doi.org/10.5539/hes.v6n1p145

Hariwijaya. (2009). *Meningkatkan Kecerdasan Matematika*. Tugupubliser.

Kusuma, J. (2006). Intelegensia, Matematika dan Pembelajarannya. *Jurnal Matematika, Statistika, Dan Komputasi*, *2*(2), 65–69. https://doi.org/10.20956/jmsk.v2i2.3289

Mahfudy, S. (2017). Strategi Pembuktian Matematis Mahasiswa Pada Soal Geometri. *JTAM*, *1*(1), 31–40.

Mujib, A. (2019). Kesulitan Mahasiswa Dalam Pembuktian Matematis: Problem Matematika Diskrit. *Jurnal Math Education Nusantara*, *2*(1), 51–57. https://doi.org/10.54314/jmn.v2i1.68

Mulhamah. (2018). Fobia dalam Pembelajaran Matematika di Pendidikan Dasar. *Elmidad: Jurnal PGMI*, *10*(1), 1–12.

Nurrahmah, A., & Karim, A. (2018). Analisis Kemampuan Pembuktian Matematis Pada Matakuliah Teori Bilangan. *Jurnal Edumath*, *4*(2), 21–29. https://doi.org/10.52657/je.v4i2.753

Rosnawati, R. (2011). Kemampuan Penalaran Matematika Siswa SMP Indonesia pada TIMSS 2011. *Prosiding Seminar Nasional Penelitian*.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of Proof Considered as Texts: Can Undergraduates tell Whether an Argument proves a Theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(1), 4–36. https://doi.org/10.2307/30034698

Siregar, I. (2016). Masalah Pembelajaran Pembuktian Matematika Bagi Mahasiswa di Indonesia. *Jurnal Mosharafa*, *5*(3), 315–324. https://doi.org/10.31980/MOSHARAFA.V5I3.286

Stefanowicz, A., & Kyle, J. (2014). *Proofs and Mathematical Reasoning*. University of Birmingham.

Suherman. (1992). *Strategi Belajar Mengajar Matematika*. Universitas Terbuka.

Tall, D. (1989). The Nature of Mathematical Proof. *Mathematics Teaching*, *127*, 23–32.

Weber, K. (2001). Student Difficulty in Constructing Proofs: The Need for Strategic Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 101–119.

Wijayanti. (2018). Kemampuan Mengkonstruksi Bukti pada Materi Grup dalam Pembelajaran Berbasis APOS. *Prisma, Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 551–558.

Yuniati, S. (2014). Analisis Kesalahan Mahasiswa dalam Menyelesaikan Soal Pembuktian Struktur Aljabar. *Beta: Jurnal Tadris Matematika*, *7*(2), 72–81.